Solución de la tarea 1

2013-I FLORENT SCHAFFHAUSER

Ejercicio I

1. Mostremos que E es un sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- La sucesión nula cumple con la relación

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \tag{1}$$

por lo que pertence a E.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones que cumplen con la relación (1), entonces

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + v_{n+2} = (u_{n+1} + u_n) + (v_{n+1} + v_n) = (u_{n+1} + v_{n+1}) + (u_n + v_n)$$

por lo que la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también pertenece a E.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces, al multiplicar por λ a ambos lados en la relación (1), se obtiene que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda u_{n+2} = \lambda u_{n+1} + \lambda u_n$$

por lo que la sucesión $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también pertenece a E.

Por lo tanto E es un sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}^N$. En particular, E es un espacio vectorial.

2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (rq^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión geométrica que cumple con la relación (1) y si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es la sucesión nula (es decir si $r \neq 0$ y $q \neq 0$), entonces la razón q de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumple con la ecuación

$$q^2 = q + 1.$$

Por lo tanto, $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ o $q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Luego,

$$u_n = u_0 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \text{o} \quad u_n = u_0 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

3. Mostremos que los vectores $(a_n = \alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n = \beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ son linealmente independientes en E. Notemos que, por la pregunta **2**, estos dos vectores sí pertenecen a E pues son sucesiones geométricas cuyas razones cumplen con la ecuación $q^2 = q + 1$, por definición de α y β. Sea $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tal que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\lambda a_n + \mu b_n = 0$. Al considerar los casos $n = 0$ y $n = 1$, se obtiene el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda + \mu & = & 0 \\ \alpha\lambda + \beta\mu & = & 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

Ya que la matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ es invertible (pues es una matriz 2×2 cuyas columnas no son proporcionales, pues $\alpha \neq \beta$), se tiene que la única solución del sistema (2) es $(\lambda, \mu) = (0, 0)$. Por lo tanto, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son linealmente independientes en E.

4. Mostremos que, para cualquier sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E, existen λ y μ en $\mathbb{R}$ tal que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda a_n + \mu b_n$. Si existe tal pareja (λ, μ), entonces en particular

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda + \mu & = & u_0 \\ \alpha\lambda + \beta\mu & = & u_1 \end{array} \right. \tag{3}$$

Pero, ya que la matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ es invertible, el sistema (3) tiene una solución única. Consideremos entonces, dado una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E, la pareja (λ, μ) solución del sistema (3). Vamos a demostrar por inducción que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$u_n = \lambda a_n + \mu b_n.$$

Esta relación se cumple para $n = 0$ y $n = 1$ por definición de λ y μ. Supongamos ahora que se cumple la hipótesis de inducción en rango n y en rango $n+1$ y demostremos que se cumple en rango $n+2$. Ya que

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

se tiene (por hipótesis de inducción) que

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= (\lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1}) + (\lambda a_n + \mu b_n) \\ &= \lambda(a_{n+1} + a_n) + \mu(b_{n+1} + b_n) \\ &= \lambda a_{n+2} + \mu b_{n+2} \end{aligned}$$

ya que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumplen con la relación (1). Eso termina la inducción.

5. Por las preguntas **3** y **4**, la familia $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}})$ es una familia libre y generadora de E. Luego es una base, que contiene dos vectores de E. Por lo tanto, la dimensión de E es igual a 2.

Ejercicio II

1. Mostremos que $u(F_1)$ es un sub-espacio vectorial de E_2:

- $0_{E_2} \in u(F_1)$ pues $0_{E_1} \in F_1$ y $u(0_{E_1}) = 0_{E_2}$.
- si $y \in u(F_1)$ y $y' \in u(F_1)$, entonces existen $x \in F_1$ y $x' \in F_1$ tales que $y = u(x)$ y $y' = u(x')$. Luego $y + y' = u(x) + u(x') = u(x + x')$. Ya que F_1 es un sub-espacio vectorial de E_1, se tiene que $(x + x') \in F_1$, luego $(y + y') \in u(F_1)$.
- de la misma manera, si $y = u(x) \in u(F_1)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda y = \lambda u(x) = u(\lambda x) \in u(F_1)$ pues $\lambda x \in F_1$.

2. Mostremos que $u^{-1}(F_2)$ es un sub-espacio vectorial de E_1.

- $0_{E_1} \in u^{-1}(F_2)$ pues $u(0_{E_1}) = 0_{E_2} \in F_2$.
- si $x \in u^{-1}(F_2)$ y $x' \in u^{-1}(F_2)$, entonces $u(x) \in F_2$ y $u(x') \in F_2$. Al ser F_2 un sub-espacio vectorial de E_2, se tiene que $u(x + x') = u(x) + u(x') \in F_2$, lo cual significa que $(x + x') \in u^{-1}(F_2)$.
- de la misma manera, si $x \in u^{-1}(F_2)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $u(\lambda x) = \lambda u(x) \in F_2$ luego $\lambda x \in u^{-1}(F_2)$.