Solución del tercer parcial

2013-I FLORENT SCHAFFHAUSER

Ejercicio I

1. Los valores propios de A son las raices (necesariamente reales, puesto que A es simétrica), del polinomio $P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_3)$.

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I_3) &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\
&= (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 1] - [(1-\lambda) - 1] + [1 - (1-\lambda)] \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) + 2\lambda \\
&= \lambda[(1-\lambda)(\lambda-2) + 2] \\
&= \lambda[-\lambda^2 + 3\lambda] \\
&= -\lambda^2(\lambda - 3).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, 0 es valor propio de A con mutiplicidad algebraica 2 y 3 es valor propio de A con multiplicidad algebraica 1.

2. El sub-espacio propio correspondiente a un valor propio λ de A es $E_\lambda = \ker(A - \lambda I_3)$. Para hallar una base de E_λ, se resuelve el sistema homogénero asociado a la matriz $(A - \lambda I_3)$. Para hallar una base ortonormal, se utiliza el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt.

$\lambda = 0$: $E_0 = \ker A = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$. Llamemos w_1 y w_2 esos dos vectores y apliquemos el proceso de Gram-Schmidt. Se pone $v_1 := w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y

$$v_2 = w_2 - \frac{(w_2|v_1)}{\|v_1\|^2} v_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Entonces la familia $\left(\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \right)$ es una base ortonormal de E_0.

$\lambda = 3$: $E_3 = \ker(A - 3I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \right)$.

3. Ya que A es simétrica real, al concatenar bases ortonormales de los sub-espacios propios de A, se obtiene una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto, la matriz

$$C := \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

es ortogonal (también se puede verificar que $C^tC = I_3$). Si se pone $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, entonces por la pregunta **2** se tiene que $AC = CD$, luego $C^tAC = D$.

4. Para cualquier $n \geq 1$, se tiene $A^n = CD^nC^t$ y $D^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$. Luego, $\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned} A^n &= C \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} C^t \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3^n/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 3^n/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 3^n/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

También se puede demostrar este resultado por inducción sobre $n \geq 1$, sin utilizar la matriz D.

Ejercicio II

Para mostrar que $(\ker A)^\perp = \mathrm{Im}\,(A^t)$, mostremos primero que $\mathrm{Im}\,(A^t) \subset (\ker A)^\perp$. Sea $y \in \mathrm{Im}\,(A^t)$. Entonces existe $x \in \mathbb{R}^p$ tal que $y = A^tx$. Luego, para cualquier $v \in \ker A$,

$$(y|v) = (A^tx|v) = (x|Av) = (x|0) = 0,$$

lo cual demuestra que $y \in (\ker A)^\perp$. Por lo tanto, $\mathrm{Im}\,(A^t) \subset (\ker A)^\perp$. Para mostrar que esta inclusión es una igualdad, es suficiente demostrar que $\dim \mathrm{Im}\,(A^t) = \dim(\ker A)^\perp$. Pero

$$\dim \mathrm{Im}\,(A^t) = \mathrm{rg}(A^t) = \mathrm{rg}(A) = \dim \mathrm{Im}\, A = n - \dim \ker A = \dim(\ker A)^\perp,$$

lo cual termina la demostración.

Ejercicio III

Recordemos que el vector y es la proyección ortogonal de x a F si y sólo si $y \in F$ y $(x - y) \in F^\perp$. Ya que $y \in F$, existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ tal que

$$y = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_k f_k.$$

Ya que $(x - y) \in F^\perp$, se tiene que, $\forall i \in \{1; \ldots; k\}$, $(x - y|f_i) = 0$, es decir

$$(x|f_i) = (y|f_i) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (f_j|f_i).$$

Ya que $(f_j|f_i) = 0$ si $j \neq i$ y $(f_i|f_i) = 1$, se tiene que $\forall i \in \{1; \ldots; k\}$, $(x|f_i) = \alpha_i$. Por lo tanto, la proyección de x a F es

$$y = (x|f_1)f_1 + \ldots + (x|f_k)f_k.$$

Ejercicio IV

1. Falso. La matriz A es triangular superior son 2 como único coeficiente diagonal. Luego 2 es el único valor propio de A. Por lo tanto, si A fuese diagonalizable, A sería igual a $2I_3$. Pero $A \neq 2I_3$, por lo que A no es diagonalizable.

2. Verdadero. Sea λ un valor propio de AB. Entonces existe $v \neq 0$ tal que $(AB)v = \lambda v$. Por lo tanto, $B(AB)v = B(\lambda v) = \lambda(Bv)$. Ya que B es invertible y $v \neq 0$, se tiene que $Bv \neq 0$, por lo tanto Bv es vector propio de BA y λ es valor propio de BA,

3. Falso. La distancia entre el punto $C = (2, 1, 5)$ y el plano $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores w_1 y w_2 es igual a la norma de la proyección ortogonal del vector $v = \overrightarrow{OC} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ a la recta $\mathcal{P}^\perp = \mathrm{Vect}(w_1 \times w_2)$. Y se tiene

$$w_1 \times w_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3e_1 + 3e_2 - 3e_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

luego $\mathcal{P}^\perp = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. Si denotamos $a = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, se tiene

$$p^\perp_{\mathcal{P}^\perp}(v) = \frac{(v|a)}{\|a\|^2}\, a = \frac{6}{3}\, a = 2a$$

y $\mathrm{dist}(C; \mathcal{P}) = \|2a\| = 2\sqrt{3}$.