Parcial 3

19 DE ABRIL 2013 — FLORENT SCHAFFHAUSER

Este es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser **justificadas**. **Cada pregunta vale dos puntos.**

Ejercicio I

Se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Hallar los valores propios de A e indicar sus respectivas multiplicidades algebraicas.

2. Para cada valor propio λ de A, hallar una base ortonormal del sub-espacio propio correspondiente.

3. Encontrar una matriz ortogonal C y una matriz diagonal D tales que $C^t AC = D$.

4. Calcular A^n para cualquier entero $n \geq 1$.

Ejercicio II

Sea $A \in \mathcal{M}(p \times n; \mathbb{R})$ una matriz y sea $A^t \in \mathcal{M}(n \times p; \mathbb{R})$ la transpuesta de A. Mostrar que

$$(\ker A)^{\perp} = \mathrm{Im}\,(A^t),$$

donde $(\ker A)^{\perp}$ es el complemento ortogonal de $\ker A$ en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio III

Sea $(E, (\cdot\,|\,\cdot))$ un espacio euclidiano y sea F un sub-espacio vectorial de E. Sea $(f_1, \dots, f_k)$ una base ortonormal de F y sea x un vector cualquiera en E. Se denota y la proyección ortogonal de x a F. Hallar las coordenadas de y en la base $(f_1, \dots, f_k)$ en función tan sólo de x y los f_i.

Ejercicio IV

Justificando su respuesta, decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. La matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ es diagonalizable.

2. Sean A y B dos matrices cuadradas con B invertible. Si λ es valor propio de AB, entonces λ es valor propio de BA.

3. La distancia entre el punto $C = (2, 1, 5)$ y el plano $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ es igual a $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.