

Parcial 2

22 DE MARZO 2013

FLORENT SCHAFFHAUSER

Este es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser **justificadas**.

Ejercicio I

Se denota $\mathbb{R}_2[X]$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a 2, con coeficientes en \mathbb{R} . Sea T la aplicación

$$T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X-1)P' - 2P \end{array}.$$

1. 1 punto. Mostrar que T es una aplicación lineal.
2. 2 puntos. Hallar la matriz de T en la base canónica $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. 1 punto. Mostrar que el conjunto $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid (X-1)P' - 2P = 0\}$ es un sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. 1 punto. Determinar el rango de T (es decir, la dimensión de la imagen de T) y decir si T es sobreyectiva.
5. 2 puntos. Hallar una base de $\ker T$ y de $\operatorname{Im} T$.

Ejercicio II

Sea $A \in \mathcal{M}(p \times n; \mathbb{R})$ una matriz y sea $A^t \in \mathcal{M}(n \times p; \mathbb{R})$ su transpuesta.

1. 2 puntos. Mostrar que $\ker(A^t A) = \ker A$.
2. 1 punto. Mostrar que $\operatorname{rg}(A^t A) = \operatorname{rg}(A)$.

Ejercicio III

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. 2 puntos. Determinar los valores propios de A .
2. 2 puntos. Para cada valor propio λ de A , hallar una base del sub-espacio propio $E_\lambda := \ker(A - \lambda I_3)$.
3. 2 puntos. Decir si existe una matriz invertible C y una matriz diagonal D tales que $AC = CD$. En caso de que se pueda, hallar unas explícitamente y justificar por qué C es invertible.
4. 1 punto. ¿Es A invertible?

Ejercicio IV

Justificando su respuesta con una demostración o un contra-ejemplo, decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. 2 puntos. Sea $(E, (\cdot | \cdot))$ un espacio euclidiano y sea (x_1, \dots, x_k) una familia de vectores todos no nulos y dos a dos ortogonales. Entonces la familia (x_1, \dots, x_k) es una familia libre.
2. 2 puntos. La familia $(\cos(x), \sin(2x), \cos^2(x), \sin^2(2x), \sin(x)\cos(x))$ es una familia libre en el espacio vectorial $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ de todas las funciones de \mathbb{R} a \mathbb{R} .
3. 2 puntos. El conjunto $F = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + 2xf'(x) - f(x) = 0\}$ es un sub-espacio vectorial del espacio vectorial $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ de todas las funciones dos veces continuamente derivables de \mathbb{R} a \mathbb{R} .