Solución del segundo parcial

2013-I — Florent Schaffhauser

Ejercicio I

1. Si Py Q están en $\mathbb{R}_2[X]$ y si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$T(P+Q) = (X-1)(P+Q)' - 2(P+Q) = (X-1)P' - 2P + (X-1)Q' - 2Q = T(P) + T(Q)$$

y

$$T(\lambda P) = (X-1)(\lambda P)' - 2(\lambda P) = \lambda[(X-1)P' - 2P] = \lambda T(P),$$

por lo que T es lineal.

2. Se tiene $T(1) = -2$, $T(X) = -1 - X$ y $T(X^2) = -2X$, por lo que la matriz de T en la base canónica de $\mathbb{R}_2[X]$ es

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. El conjunto $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid (X-1)P' - 2P = 0\}$ es el núcleo de la aplicación lineal T, así que F es un sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}_2[X]$.

4. La matriz A hallada en **2** es triangular superior, con dos pivotes, así que $\mathrm{rg}(A) = 2$. Ya que A es la matriz de T en la base canónica de $\mathbb{R}_2[X]$, el rango de T es igual a 2. Por lo tanto, T no es sobreyectiva, pues $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3 > \mathrm{rg}(T)$.

5. Para hallar una base de $\mathrm{Im}\, T$, es suficiente hallar una base del espacio generado por las columnas de A:

$$\mathrm{Im}\, T = \mathrm{Vect}(-2, -1-X) = \mathrm{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X] \subset \mathbb{R}_2[X].$$

Ya que $\dim \ker T = \dim \mathbb{R}_2[X] - \mathrm{rg}(T) = 1$, es suficiente, para hallar una base de $\ker T$, hallar un vector nulo en $\ker T$. Por ejemplo, $T(X^2 - 2X + 1) = 0$, por lo que

$$\ker T = \mathrm{Vect}(X^2 - 2X + 1).$$

Ejercicio II

1. Si $Ax = 0$, entonces $(A^tA)x = A^t(Ax) = 0$, por lo que $\ker A \subset \ker(A^tA)$. Recíprocamente, si $A^tAx = 0$, entonces $x^tA^tAx = 0$, es decir $\|Ax\|^2 = 0$, luego $Ax = 0$, por lo que $\ker(A^tA) \subset \ker A$. En conclusión, $\ker(A^tA) = \ker A$.

2. Si $A \in \mathcal{M}(p \times n; \mathbb{R})$, A^tA y A ambas tienen n columnas. Por lo tanto,

$$\mathrm{rg}(A^tA) = n - \dim\ker(A^tA) = n - \dim\ker A = \mathrm{rg}(A).$$

Ejercicio III

1. Los valores propios de A son las raíces (reales) del polinomio caraterístico de $A \in \mathcal{M}(3; \mathbb{R})$:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3).$$

Para calcular ese determinante, se espande con respecto a la tercera fila:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= (1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda-1)[(\lambda+1)(\lambda-2)+2] \\ &= -(\lambda-1)[\lambda^2 - \lambda] \\ &= -\lambda(\lambda-1)^2, \end{aligned}$$

así que los valores propios de A son 0 (con multiplicidad algebraica 1) y 1 (con multiplicidad algebraica 2).

2. Si $\lambda = 0$, el sub-espacio propio E_0 coincide con $\ker A$. Para hallar una base de $\ker A$, se resuelve el sistema $Ax = 0$:

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ssi} \quad x_3 = 0 \text{ y } x_1 = x_2.$$

Por lo tanto,

$$\ker A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Si $\lambda = 1$, para hallar una base de $E_1 = \ker(A - I_3)$, se resuelve el sistema $(A - I_3)x = 0$, es decir el sistema

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

La solución general de ese sistema es (x_1, x_2, x_3) donde $x_1 = \frac{1}{2}x_2 + x_3$ con $x_2 \in \mathbb{R}$ y $x_3 \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, la familia

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

es una base de E_1 (E_1 tiene dimensión 2 así que la multiplicidad geométrica de 1 como valor propio de A es igual a su multiplicidad algebraica).

3. Ya que

$$\dim E_0 + \dim E_1 = 1 + 2 = \dim \mathbb{R}^3,$$

la matriz A es diagonalizable, es decir que existe una matriz invertible C y una matriz diagonal D tales que $AC = CD$. Explícitamente, si ponemos

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces las columnas de C forman una base de $\mathbb{R}^3$, pues la concatenación de bases de sub-espacios propios es una familia libre y aquí tenemos tres vectores linealmente independientes en un espacio de dimensión 3, por lo tanto C es invertible y es fácil verificar que $AC = CD$ (sólo hay que tener cuidado con el orden en el que se ponen los coeficientes diagonales en D, ése debe corresponder al orden de las columnas en C, sub-espacio propio por sub-espacio propio).

4. 0 es valor propio de A así que A no es invertible.

Ejercicio IV

1. Verdadero: si $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k = 0$, entonces, para cualquier $i \in \{1 : \ldots ; k\}$, se tiene

$$(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k \mid x_i) = 0$$

es decir $\lambda_1(x_1 \mid x_i) + \ldots + \lambda_k(x_k \mid x_i) = 0$. Ya que $(x_j \mid x_i) = 0$ si $j \neq i$, lo anterior implica

$$\lambda_i \|x_i\|^2 = 0.$$

Ya que $x_i \neq 0$, eso impplica a su vez que $\lambda_i = 0$ y ya que eso vale cualquier i, la familia $(x_1, \ldots, x_k)$ es libre.

2. Falso. Se tiene por ejemplo la relación de dependencia lineal no trivial (es decir, con coeficientes no tos nulos)

$$\operatorname{sen}(2x) - 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = 0,$$

por lo que la familia $(\cos(x), \operatorname{sen}(2x), \cos^2(x), \operatorname{sen}^2(2x), \operatorname{sen}(x)\cos(x))$ no es una familia libre en el espacio vectorial $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ de todas las funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

3. Verdadero. La función nula pertenece al conjunto $F = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + 2xf'(x) - f(x) = 0\}$ y, si f y g ambas están en F y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces, para cualquier $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & (f+g)''(x) + 2x(f+g)'(x) - (f+g)(x) \\ = \ & [f''(x) + 2xf'(x) - f(x)] + [g''(x) + 2xg'(x) - g(x)] \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

y

$$(\lambda f)''(x) + 2x(\lambda f)'(x) - (\lambda f)(x) = \lambda[f''(x) + 2xf'(x) - f(x)] = 0,$$

por lo que $(f+g) \in F$ y $(\lambda f) \in F$. Por lo tanto, F es un sub-espacio vectorial del espacio vectorial $\mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ de todas las funciones dos veces continúamente derivables de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.