Solución del primer parcial

15 de febrero 2013 — Florent Schaffhauser

Ejercicio I

1. Se forma la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y, mediante operaciones elementales en las filas, se llega a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Por lo tanto, A es invertible y

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. La solución del sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio II

1. Se forma la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

y se llega, mediante operaciones elementales en las filas, a la forma escalón reducida

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, la solución general del sistema es

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. La forma escalón reducida de A tiene pivotes en las columnas 1, 2, 4. Por lo tanto, las columnas 1, 2 y 4 de A forman una base de $\operatorname{Im} A$. Es decir,

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

es una base del espacio generado por las columnas de A.

3. Por el teorema del rango, se tiene $\dim(\operatorname{Ker} A) = 5 - \dim(\operatorname{Im} A) = 1$. También se puede observar que $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es una base de $\operatorname{Ker} A$ (cf. pregunta **1**).

Ejercicio III

1. El conjunto $\operatorname{Ker} A$ contiene 0, pues $A0 = 0$, y es estable por suma y por multiplicación por un escalar, pues si $Ax = 0$ y $Ax' = 0$ entonces $A(x + x') = Ax + Ax' = 0$ y si $Ax = 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $A(\lambda x) = \lambda(Ax) = 0$.

2. El conjunto $\operatorname{Im} A$ contiene 0, pues $0 = A0$, y es estable por suma y por multiplicación por un escalar, pues si $y = Ax$ y $y' = Ax'$ entonces $y + y' = A(x + x')$ y si $y = Ax$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\lambda y = A(\lambda x)$.

Ejercicio IV

1. Falso. El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 2x = 7\}$ no es un sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ pues no contiene $(0, 0)$.

2. Falso. La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 8 & 7 & 1 \\ 25 & 8 & 17 \end{pmatrix}$ no es invertible pues la tercera columna C_3 es igual a $(C_1 - C_2)$.

3. Falso. La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ tiene rango 1 pues tiene dos columnas y esas columnas son proporcionales.