Solución del examen final

2013-I FLORENT SCHAFFHAUSER

Ejercicio I

1. Se tiene $A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = 8\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, así que 8 es valor propio de A y $E_3 := \ker(A - 3I_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$. El otro valor propio es $\operatorname{tr} A - 8 = 2$ y $A - 2I_2 = \begin{bmatrix}3 & 3\\3 & 3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$, así que $E_2 := \ker(A - 2I_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)$.

Se pone entonces $C = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix}8 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$ y se tiene, por un lado, $C^tC = I_2$, así que C es ortogonal y, por otro lado, $AC = CD$ (por lo anterior), así que $C^tAC = D$.

2. Sea $\mathcal{C}$ la cónica de ecuación $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$. La ecuación también se escribe $\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix} A \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, donde A es la matriz anterior. Ya que el producto de los valores propios de A es $16 > 0$, la curva $\mathcal{C}$ es una elipse. Si ponemos $\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix} := C^t\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, la ecuación de $\mathcal{C}$ se vuelve $u^2 + \frac{v^2}{2^2} = 1$, lo cual es la ecuación de una elipse de eje mayor $u = 0$ (longitud del eje mayor: 4) y de eje menor $v = 0$ (longitud del eje menor : 2). En el marco (x, y), el eje $v = 0$ es la recta de ecuación $y = x$: es la imagen de la recta de ecuación $y = 0$ por la rotación $C = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$, que es la rotación directa de ángulo $\frac{\pi}{4}$.

Ejercicio II

1. Se tiene $A^t = \overline{A}$, así que A es hermitian ($A^* = A$). Una matriz unitaria es una matriz U tal que $U^*U = I_n$. En particular, tal U es invertible y $U^{-1} = U^*$.

2. Busquemos los valores propios de A. Ya que el producto de sas es igual a $\det(A) = 0$, A tiene un valor propio nulo. El otro es $\operatorname{tr}(A) - 0 = 2$. Se verifica entonces que $\ker A = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}-i\\1\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}\frac{-i}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\right)$ y $\ker(A - 2I_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}\frac{i}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\right)$. Sea $U = \begin{bmatrix}-i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$. Entonces $U^*U = I_2$, por lo que U es unitaria y, por definición de U y D, se tiene $AU = UD$, así que $U^*AU = D$.

Ejercicio III

1. La matriz A no es diagonalizable pues tiene un solo valor propio y no es múltiple de la identidad.

2. a. Ya que $B = A - 2I_5 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ & 0 & 0 & 0\\ & & 0 & 1\\ & & & 0\end{bmatrix}$, se tiene $B^2 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ & 0 & 0 & 0\\ & & 0 & 0\\ & & & 0\end{bmatrix}$ y $B^3 = 0$, por lo que B es nilpotente de índice 3.

b. Ya que $\dim\ker B = 2$ y el índice de nilpotencia de B es igual a 3, sabemos que la forma reducida de Jordan de B tiene exactamente 2 bloques de Jordan y tiene por lo menos un bloque de tamaño 3. Ya que B es de tamaño 4×4, la forma reducida de Jordan de B necesariamente es (salvo permutaciones de los bloques)

$$\Delta_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

(un bloque de Jordan nilpotente de tamaño 3 y un bloque de Jordan nilpotente de tamaño 1).

Para hallar C invertible tal que $C^{-1}BC = \Delta_B$, se busca una base de Jordan para el endomorfismo u asociado a B en la base canónica (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{C}^4$. Recordamos que

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \subsetneq & \ker u & \subsetneq & \ker u^2 & \subsetneq & \ker u^3 \\ \| & & \cup & & \cup & & \| \\ \{0\} & \subsetneq & \operatorname{Im} u^2 & \subsetneq & \operatorname{Im} u & \subsetneq & \mathbb{C}^4. \end{array}$$

Primer paso: busquemos una base de $\operatorname{Im} u^2$, cada vector bajo la forma $u^2(x)$. Por la forma que tiene B^2 arriba, se tiene $\operatorname{rg} u^2 = 1$ e $\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Vect}(u^2(e_4))$.

Segundo paso: completemos la familia libre $(u^2(e_4), u(e_4))$ en una base de $\operatorname{Im} u$. Puesto que $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} B = 2$, $(u^2(e_4), u(e_4))$ ya es una base de $\operatorname{Im} u$ y no hay que completarla.

Tercer paso: Para completar la familia libre $(u^2(e_4), u(e_4), e_4)$ en una base de $\mathbb{C}^4$, es suficiente completar $u^2(e_4) \in \operatorname{Im} u^2 \subset \ker u$ en una base de $\ker u$. Se tiene $\ker u = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$ y $u^2(e_4) = e_1$. Por lo tanto, $(u^2(e_4), e_2)$ es una base de $\ker u$.

Conclusión: el teorema de reducción de endomorfismos nilpotentes de Jortdan nos permite afirmar que $(u^2(e_4), u(e_4), e_4, e_2)$ es una base de $\mathbb{C}^4$. Es esta base, la matriz de u es igual a Δ_B. Explícitamente, si ponemos $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ entonces $C^{-1}CB = \Delta_B$.

Para verificarlo, nótese que $C^{-1} = C^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. La forma reducida de Jordan de la matriz $B = A - 2I_5$ es Δ_B. Por lo tanto, la forma reducida de Jordan Δ_A de la matriz $A = B + 2I_5$ es $\Delta_A = \Delta_B + 2I_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ & 2 & 1 & 0 \\ & & 2 & 0 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$.

Ejercicio IV

1. Verdadero. La aplicación $(f, g) \longmapsto (f \mid g) := \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt$ es bilineal y simétrica en f y g. Falta verificar que es definida positiva. Si $f : [-1; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y cumple con $\int_{-1}^{1} f^2(t)\, dt = 0$, entonces por continuidad de f^2 eso implica que $f^2 = 0$ en $[-1; 1]$, es decir $f = 0$ en ese intervalo.

2. Verdadero. Si A es nilpotente, entonces su único valor propio es 0. Luego, si A también es diagonalizable, es igual a 0 por la identidad, es decir a la matriz nula.

3. Verdadero. La matriz aumentada del sistema es

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

así que el sistema tiene una cantidad infinita de soluciones.