Examen final (2 horas)

21 DE MAYO 2013 — FLORENT SCHAFFHAUSER

Este es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser **justificadas**. **Cada pregunta vale dos puntos.** Este examen tiene dos caras.

Ejercicio I

1. Diagonalizar la matriz simétrica real $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ en una base ortonormal de vectores propios.

2. Decir qué tipo de curva es la curva $\mathcal{C}$ de ecuación

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$$

y dibujarla en el plano de coordenadas (x, y).

Ejercicio II

Se considera el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^2$, dotado del producto escalar hermitiano canónico

$$(z \,|\, w) = \overline{z_1}\, w_1 + \overline{z_2}\, w_2.$$

Si M es una matriz con coeficientes complejos, se denota M^* la matriz $\overline{M}^t$.

Se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$.

1. Mostrar que la matriz A es hermitiana. Recordar la definición de una matriz unitaria.

2. Hallar una matriz unitaria U y una matriz diagonal D tal que $U^*AU = D$.

Ejercicio III

Se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$.

1. Explicar por qué la matriz A no es diagonalizable.

2. Sea $B = A - 2I_4$.

a. Mostrar que B es nilpotente (es decir que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B^n = 0$).

b. Hallar la forma reducida de Jordan Δ_B de la matriz B, así como una matriz invertible C tal que $C^{-1}BC = \Delta_B$.

3. Hallar la forma reducida de Jordan Δ_A de la matriz A.

Ejercicio IV

Justificando la respuesta, decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. Sea $E := \{f : [-1; 1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua}\}$ el espacio vectorial real de funciones continuas del intervalo $[-1; 1]$ a $\mathbb{R}$. Entonces la aplicación

$$(\cdot \,|\, \cdot) : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto & (f \,|\, g) := \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt \end{array}$$

es un producto escalar euclidiano en E.

2. Se recuerda que se dice que una matriz A es nilpotente si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = 0$. Entonces la única matriz que es a su vez diagonalizable y nilpotente es la matriz nula.

3. El sistema

$$\begin{cases} x & +\, y & +\, z & = & 1 \\ x & -\, y & & = & -2 \\ 2x & & +\, z & = & -1 \end{cases}$$

tiene una cantidad infinita de soluciones.