Tarea para entregar el 21 de septiembre

2012-II — Florent Schaffhauser

Cada pregunta vale un punto. La calidad de la redacción entra por una parte importante en la evaluación del trabajo.

1. Mostrar que el grupo de automorfismos de $\mathbb{C}$ como superficie de Riemann es

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \longmapsto az + b : a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}.$$

2. Sean ω_1 y ω_2 dos números complejos independientes sobre $\mathbb{R}$ y sea

$$\Gamma = \{m\omega_1 + n\omega_2 : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\}$$

el retículo de $\mathbb{C}$ que generan. Se recuerda que $\mathbb{C}/\Gamma$ es una superficie de Riemann homeomorfa a $S^1 \times S^1$. Se denota $p_\Gamma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ la proyección canónica.

a. Sea Γ' otro retículo y sea $f : \mathbb{C}/\Gamma \longmapsto \mathbb{C}/\Gamma'$ una aplicación holomorfa biyectiva. Mostrar que existe un $\widetilde{f} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "p_\Gamma"] & \mathbb{C} \arrow[d, "p_{\Gamma'}"] \\
\mathbb{C}/\Gamma \arrow[r, "f"] & \mathbb{C}/\Gamma'
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Indicación : $\mathbb{C}$ es simplemente conexo y p es un cubrimiento topológico.

b. Se supone que, por ejemplo, $\mathrm{Im}\,(\omega_2/\omega_1) > 0$. Mostrar que existe $h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ tal que $h(\Gamma)$ es un retículo de la forma

$$\Gamma_\tau = \{m + n\tau : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\} \tag{1}$$

con $\mathrm{Im}\,(\tau) > 0$.

c. Deducir de lo anterior que, para cualquier retículo Γ de $\mathbb{C}$, existe un $\tau \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Im}\,(\tau) > 0$ tal que $\mathbb{C}/\Gamma$ es isomorfo a $\mathbb{C}/\Gamma_\tau$ como superficie de Riemann.

3. Sea $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$.

a. Sean τ y τ' dos elementos der $\mathcal{H}$ y Γ_τ y $\Gamma_{\tau'}$ los retículos asociados (como en (1)). Mostrar que $\mathbb{C}/\Gamma_\tau$ es isomorfo a $\mathbb{C}/\Gamma_{\tau'}$ si y sólo si existe una transformación

$$\left(z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}\right) \in \mathbf{PSL}(2;\mathbb{Z}) \subset \mathbf{PSL}(2;\mathbb{R}) = \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$$

(es decir $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $ad - bc = 1$) tal que

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\cdot$$

b. Los puntos del cociente

$$\mathcal{M}_1 := \mathbf{PSL}(2;\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}$$

son clases de isomorfismo de superficies de Riemann de la forma $\mathbb{C}/\Gamma$. Mostrar que $\mathcal{M}_1$ es una superficie de Riemann.

c. Mostrar que $\mathbf{PSL}(2;\mathbb{Z})$ es generado por las dos transformaciones $z \longmapsto z + 1$ y $z \longmapsto -1/z$.

d. Mostrar que cualquier órbita de la acción de $\mathbf{PSL}(2;\mathbb{Z})$ en $\mathcal{H}$ intersecta la región $\mathcal{R}$ de $\mathcal{H}$ definida por

$$\mathcal{R} := \left\{-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\,(z) \leq \frac{1}{2}\ ,\ |z| \geq 1\right\}$$

en un punto de su interior o en dos puntos de su frontera.

e. Deducir de lo anterior que $\mathcal{M}_1$ es isomorfo a $\mathbb{C}$ como superficie de Riemann.

Indicación : dibujar la región $\mathcal{R}$ y mostrar que la transformación $z \mapsto z+1$ envía la semi-recta $\{\mathrm{Re}\,(z) = -1/2,\ |z| \geq 1\}$ a la semi-recta $\{\mathrm{Re}\,(z) = 1/2,\ |z| \geq 1\}$ y que la transformación $z \longmapsto -1/z$ es una rotación directa de centro i y de ángulo $\pi/2$ que manda el arco de círculo $\{-1/2 \leq \mathrm{Re}\,(z) \leq 0,\ |z| = 1\}$ al arco de círculo $\{0 \leq \mathrm{Re}\,(z) \leq 1/2,\ |z| = 1\}$.

f. $\mathcal{H}$ es simplemente conexo y $\mathcal{M}_1 = \mathbf{PSL}(2;\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}$ con $PSL(2,\mathbb{Z})$ actuando de manera propia y discontinua en $\mathcal{H}$. ¿Por qué es incorrecto decir que $\mathbf{PSL}(2;\mathbb{Z})$ es el grupo fundamental topológico de $\mathcal{M}_1$?