Solución del segundo parcial

2012-I — Florent Schaffhauser

1. $\mathcal{F}(U)$ es un espacio vectorial complejo. Si $V \subset U$, el homomorfismo de restricción de $\mathcal{F}(U)$ a $\mathcal{F}(V)$ es $y \longmapsto y|_V$, por lo que se cumplen los axiomas de un haz para el prehaz $\mathcal{F}$.

2. Por un teorema de Cauchy, existe, para cualquier $z \in \mathbb{C}$, un abierto $U \ni x$ y un *único* germen de función holomorfa $y_z : U \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $y_z' = f\, y_z$ y $y_z(x) = z$. La aplicación $z \longmapsto \rho_x(y_z)$ es un inverso lineal de Φ_x.

3. Si dos soluciones de una ecuación diferencial coinciden en un punto, entonces coinciden en una vecindad de ese punto. Luego, el conjunto

$$A := \{z \in U \mid y_1(z) = y_2(z)\}$$

es abierto (y no vacío por la hipótesis de la pregunta). Ya que A también es cerrado y U es conexo, $A = U$ y $y_1 = y_2$ en U.

4. a. Sea $y_0 : U_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ una solución de la ecuación (1) $y' = f\, y$ tal que $\rho_{\gamma(0)}(y_0) = \varphi_0$. Para cualquier $t \in [0;1]$ y cualquier condición inicial $\varphi_t \in \mathcal{F}_{\gamma(t)}$, existe una solución local $y_t : U_t \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\rho_{\gamma(t)}(y_t) = \varphi_t$. Luego, por compacidad del intervalo $[0;1]$, existe una extensión de y_0 a una vecindad de $\gamma([0;1])$ en $\mathbb{C}$. Esta extensión define un levantamiento $\widetilde{\gamma}(t) := \rho_{\gamma(t)}(y_t)$ de γ a $X_{\mathcal{F}}$ tal que $\widetilde{\gamma}(0) = \varphi_0$.

b. Por la pregunta **3.**, el haz $\mathcal{F}$ cumple con el principio de monodromía, por lo que el levantamiento es único.

5. a. Es claro que $\chi(\gamma)$ es una aplicación lineal. Si γ y η son dos lazo basados en 1 (de hecho, basta que $\eta(1) = \gamma(0)$) la extensión de un germen de solución de (1) a lo largo de η y después a lo largo de γ es lo mismo que la extensión de ese germen a lo largo de $\gamma * \eta$. Luego $\chi(\gamma * \eta) = \chi(\gamma) \circ \chi(\eta)$.

b. Notemos primero que si F es una primitiva de f en un abierto U, entonces $\exp \circ F$ es una solución de (1) ya que

$$(\exp \circ F)' = F'\, (\exp \circ F) = f\, (\exp \circ F).$$

Por definición de λ_0,

$$e^{F_1} = \lambda_0 e^{F_0} = \chi(\gamma_0) \cdot e^{F_0}$$

si y sólo si $e^{F_1} = \widetilde{\gamma_0}(1)$ donde $\widetilde{\gamma_0}$ es el único levantamiento de γ_0 a $X_{\mathcal{F}}$ tal que $\widetilde{\gamma_0}(0) = \varphi_0$. Pero $\gamma_0 = \eta_2 * \eta_1$ donde $\eta_1(t) = e^{i\pi t}$ y $\eta_2(t) = e^{-i\pi t}$, $t \in [0;1]$. Ya que F_0 coincide con F_1 en un vecindad de $-1 = \eta_1(1) = \eta_2(0)$, las soluciones de (1) correspondientes tienen el mismo germen en -1. Pero la extensión de ese germen a lo largo de η_1^{-1} da e^{F_0} (ya que F_0 está definida en una vecindad de $\eta_1([0;1])$) y la extensión de ese germen a lo largo de η_2 da e^{F_1} (por la misma razón). Luego $\chi(\gamma_0) \cdot e^{F_0} = e^{F_1}$.

c. La igualdad de gérmenes $e^{F_1} = \lambda_0 e^{F_0}$ en $\mathcal{F}_1$ implica la igualdad $(\exp \circ F_1)(1) = \lambda_0\, (\exp \circ F_0)(1)$ en $\mathbb{C}$.

d. En la notación anterior,

$$\int_{\gamma_0} f(z)\, dz = \int_{\eta_1} f(z)\, dz + \int_{\eta_2} f(z)\, dz$$

y estas dos integrales se pueden calcular utlizando las primitivas F_0 y F_1 respectivamente.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} f(z)\, dz &= \big(F_0(\eta_1(1)) - F_0(\eta_1(0))\big) + \big(F_1(\eta_2(1)) - F_1(\eta_2(0))\big) \\ &= \big(F_0(-1) - F_0(1)\big) + \big(F_1(1) - F_1(-1)\big). \end{aligned}$$

Ya que $F_0(-1) = F_1(-1)$, se obtiene

$$\begin{aligned}\exp\left(\int_{\gamma_0} f(z)\,dz\right) &= \exp\big(F_1(1) - F_0(1)\big)\\ &= \frac{(\exp \circ F_1)(1)}{(\exp \circ F_0)(1)}\\ &= \lambda_0.\end{aligned}$$

Observación: la conclusión del problema es que la representación χ sólo depende del residuo en su único polo del coeficiente f en la ecuación (1). Esto constituye la primera utilización que se hace en el problema de propiedades holomorfas (hasta ahora, sólo se había utilizado la teoría de ecuaciones diferenciales).

e. Si $f(z) = \frac{1}{z}$ en $\mathbb{C}^*$, $\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = i2\pi$, luego $\lambda_0 = e^{i2\pi} = 1$ y $\chi(k) = k \times \chi(1) = k$ (pues $\lambda_0 = \chi(1)$).