Solución del primer parcial

2012-I — Florent Schaffhauser

1. Veamos la función meromorfa f en X como una aplicación holomorfa $f : X \longrightarrow \mathbb{C}\mathbf{P}^1$. Ya que X es compacta y f abierta, se tiene $f(X) = \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ (pues $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ es conexo y $f(X)$ es a la vex cerrado y abierto en $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$). Es decir, f es sobreyectiva. Ya que f tiene un solo polo en X (es decir $f^{-1}(\{\infty\}) = \{z_0\}$) y que este polo es de orden 1, f tiene grado 1 en X. Luego f es inyectiva, por lo que f de hecho es una biyección holomorfa. Por lo tanto, f es un isomorfismo de superficies de Riemann.

2. Se aplica el lema de Schwarz a f y a f^{-1} (ambas mandan 0 a 0): para cualquier $z \in \mathcal{D}$ y cualquier $w \in \mathcal{D}$,

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{y} \quad |f^{-1}(w)| \leq |w|.$$

Para $w = f(z)$, se obtiene

$$|z| \leq |f(z)| \leq |z|$$

luego $|f(z)| = |z|$ para cualquier $z \in \mathcal{D}$. Otra vez por el lema de Schwarz, se tiene entonces que f es una rotación: existe $\alpha \in S^1$ tal que $f(z) = \alpha z$ en $\mathcal{D}$.

3. Ya que $\mathbf{PSL}(2;\mathbb{R})$ actúa transitivamente en $\mathcal{H}$, podemos suponer que $z_0 = i$. Luego el estabilizador de i en Γ está contenido en el estabilizador de i en $\mathbf{PSL}(2;\mathbb{R})$, lo cual es isomorfo a $\mathbf{PSO}(2) \simeq S^1/\{\pm 1\} \simeq S^1$. Por lo tanto, Γ_{z_0} es un sub-grupo discreto de S^1. Luego Γ_{z_0} es cíclico.

4. La aplicación holomorfa

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array}$$

es una biyección holomorfa. Ya que $\mathcal{H} \simeq \mathcal{D}$ por la transformación de Cayley, se tiene que $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+)$ es isomorfo a $\mathcal{D}$.

5. Ya que f es holomorfa en todo $\mathbb{C}$, podemos escribir $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n z^n$ donde la serie de potencias tiene un radio de convergencia infinito. Por las desigualdades de Cauchy y la hipótesis hecha sobre f, se tiene, para cualquier $r > 0$,

$$|a_n| \leq \frac{1}{r^n} \sup_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{1}{r^n}(A + Br^k),$$

lo cual tiende a 0 cuando r tiende a $+\infty$ y $n > k$. Luego $a_n = 0$ para $n > k$ y f es un polinimio de grado menor o igual a k.

6. Recordemos la fórmula de Riemann-Hurwitz para una aplicación holomorfa $f : X \longrightarrow Y$ de grado n entre superficies de Riemann compactas (conexas) de respectivos géneros g_X y g_Y:

$$(2 - 2g_X) = n(2 - 2g_y) - R_f \tag{1}$$

donde

$$R_f = \sum_{x \in \mathrm{Crit}(f)} (k_x - 1) \geq 0$$

y k_x es la multiplicidad de f en x.

a. Si $X = \mathbb{C}\mathbf{P}^1$, $Y = \Sigma$ con $g_\Sigma \geq 1$ y existe una aplicación holomorfa $f : \mathbb{C}\mathbf{P}^1 \longrightarrow \Sigma$, entonces (1) se vuelve

$$2 = n(2 - 2g_\Sigma) - R_f \leq 0,$$

lo cual es absurdo.

b. Si $X = \Sigma$, $Y = \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ y $f : \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ tiene grado 2 y 4 puntos de ramificación (puntos críticos), entonces las fibras de f o tienen 2 puntos x_1 y x_2 cada uno cumpliendo $k_{x_i} = 1$ o tienen un solo punto $x \in \mathrm{Crit}(f)$ que cumple $k_x = 2$ (pues, para cualquier $y \in Y$, uno tiene $\sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} k_x = n$, el grado de f, que es igual a 2 en el caso presente). Ya que $\mathrm{Crit}(f)$ tiene 4 puntos, se tiene, en (1),

$$2 - 2g_\Sigma = 2 \times 2 - 4 \times (2 - 1) = 0$$

luego $g_\Sigma = 1$.