UNIVERSIDAD DE LOS ANDES — DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Superficies de Riemann

2012-II — FLORENT SCHAFFHAUSER

1. Datos del curso

- Nombre del curso : *Superficies de Riemann*
- Profesor : Florent Schaffhauser
- Código del curso : MATE-4405
- Créditos : 4
- Prerequisitos :
  - Variable compleja
  - Geometría diferencial

2. Objetivos

El objetivo del curso es dar una introducción a la teoría de superficies de Riemann, enfatizando varios enfoques : analítico, topológico y algebraico. Se dará una introducción a la noción de fibrado vectorial (en rectas) sobre una superficie de Riemann y se estudiará en particular la jacobiana de tal superficie. Se presentará también una demostración del teorema de Riemann-Roch para superficies de Riemann compactas.

3. Contenido (15 semanas)

(1) **Teoría básica** (3 semanas)
- (a) **Repaso de análisis complejo**
  - (i) Funciones holomorfas y meromorfas
  - (ii) Formal normal local
  - (iii) La esfera de Riemann
- (b) **Superficies de Riemann**
  - (i) Haces sobre un espacio topológico
  - (ii) Espacios anillados
  - (iii) Ejemplos de superficies de Riemann
- (c) **Grupos de automorfismos de algunas superficies de Riemann**
  - (i) $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, $\mathrm{Aut}(\mathcal{H})$, $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$
  - (ii) $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}\mathbf{P}^1)$
  - (iii) Curvas elípticas

(2) **Aplicaciones entre superficies de Riemann** (4 semanas)
- (a) **Grado de una aplicación holomorfa**
  - (i) Puntos de ramificación
  - (ii) Grado
  - (iii) Aplicaciones holomorfas propias y cubrimientos ramificados
- (b) **Cubrimientos topológicos**
  - (i) Definición
  - (ii) Grupos de automorfismos de cubrimientos
  - (iii) Teoría de Galois de los cubrimientos I
- (c) **El cubrimiento universal y su grupo de automorfismos**
  - (i) El primer grupo de homotopía de un espacio topológico
  - (ii) Construcción del cubrimiento universal
  - (iii) Teoría de Galois de los cubrimientos II

(3) **Topología de superficies de Riemann** (1 semana)
- (a) **Superficies compactas orientables**
  - (i) Repaso de teoría de superficies
  - (ii) Género
  - (iii) Estructuras holomorfas en un toro complejo
- (b) **Característica de Euler-Poincaré**
  - (i) Definición

- (ii) Propiedades
- (iii) Ejemplos
- (c) **Fórmula de Riemann-Hurwitz**
  - (i) Indice de ramificación
  - (ii) Demostración de la fórmula
  - (iii) Aplicaciones

(4) **Extensión analítica y monodromía** (4 semanas)
- (a) **Gérmenes de funciones holomorfas**
  - (i) El anillo local $O_{X,x}$
  - (ii) Fibra de un prehaz en un punto
  - (iii) El espacio *étalé* asociado a un prehaz
- (b) **Extensión analítica a lo largo de una curva**
  - (i) Formulación geométrica del problema
  - (ii) El principio de monodromía
  - (iii) Ecuaciones diferenciales con coeficientes holomorfos
- (c) **La superficie de Riemann de una función algebraica**
  - (i) Cuerpos de funciones meromorfas
  - (ii) Cubrimientos analíticos y extensiones de cuerpos
  - (iii) Funciones algebraicas

(5) **Teoría de la jacobiana** (3 semanas)
- (a) **Fibrados en rectas**
  - (i) El grupo de Picard
  - (ii) Ejemplos
  - (iii) El haz de secciones holomorfas de un fibrado
- (b) **El teorema de Riemann-Roch**
  - (i) Secciones meromorfas
  - (ii) Divisores
  - (iii) Riemann-Roch y aplicaciones
- (c) **Los teoremas de Abel y Jacobi**
  - (i) Períodos
  - (ii) El teorema de Abel
  - (iii) Inversión de Jacobi

4. Evaluación

- Parciales : $2 \times 25\,\%$.
- Tareas : $20\,\%$.
- Examen final : $30\,\%$.