Universidad de Los Andes — Superficies de Riemann

Parcial 2, duración 2 horas

26 de octubre 2012 — Florent Schaffhauser

Cada pregunta vale un punto. Se autorizan las notas de clase pero el uso de libros está prohibido.

Se considera la ecuación diferencial

$$y' = f\, y \tag{1}$$

en la superficie de Riemann $X = \mathbb{C}^*$, donde $f : X \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa con una singularidad de tipo polo en 0. Se denota O_X el haz de funciones holomorfas en X y, para cualquier abierto U de X, se considera el conjunto

$$\mathcal{F}(U) := \{ y \in O_X(U) \mid \forall\, z \in U, y'(z) = f(z)\, y(z) \}$$

de soluciones en U de la ecuación diferencial (1).

1. Mostrar que $\mathcal{F}$ es un haz de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales en X.

2. Sea $x \in X$ y sea $\mathcal{F}_x$ la fibra de $\mathcal{F}$ en x. Mostrar que la aplicación

$$\Phi_x : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}_x & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \rho_x(y) & \longmapsto & y(x) \end{array}$$

es un isomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales.

3. Sea U un abierto conexo de X y sea $x \in U$. Mostrar que si y_1 y y_2 son dos elementos de $\mathcal{F}(U)$ tales que $\rho_x(y_1) = \rho_x(y_2)$ entonces $y_1 = y_2$.

4. Sea $\gamma : [0;1] \longrightarrow X$ un camino en X y sea $\varphi_0 \in \mathcal{F}_{\gamma(0)}$.

a. Mostrar que existe un levantamiento de γ a la realización geométrica $X_{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$, es decir una aplicación continua

$$t \longmapsto \widetilde{\gamma}(t) \in \mathcal{F}_{\gamma(t)},$$

tal que $\widetilde{\gamma}(0) = \varphi_0$.

b. Mostrar que este levantamiento es único.

5. Sea γ_0 el camino

$$\gamma_0 : \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ t & \longmapsto & e^{i2\pi t} \end{array}$$

(nótese que γ_0 es un generador de $\pi_1(X;1) \simeq \mathbb{Z}$).

a. Mostrar que el levantamiento de lazos basados en 1 (cf. pregunta **4**) define una representación lineal

$$\chi : \begin{array}{ccc} \pi_1(X;1) & \longrightarrow & \mathbf{GL}(\mathcal{F}_1) \\ \gamma & \longmapsto & (\chi(\gamma) : \varphi_0 \mapsto \varphi_1) \end{array} \tag{2}$$

(se trata de demostrar que, para cualquier $\gamma \in \pi_1(X,1)$, $\chi(\gamma)$ es una aplicación lineal biyectiva y que χ es un homomorfismo de grupos).

b. Se supone que existe una primitiva F_0 de f en $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-$ y una primitiva F_1 de f en $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_+$ que además coincide con F_0 en

$$\Omega := \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < 0 \}.$$

Se denota e^{F_0} (resp. e^{F_1}) el germen de $\exp \circ F_0$ (resp. $\exp \circ F_1$) en 1.
Mostrar que

$$e^{F_1} = \lambda_0 e^{F_0}$$

donde $\lambda_0 = \chi(\gamma_0)$.
Indicación: eso significa que e^{F_1} se obtiene a partir de $e^{F_0} \in \mathcal{F}_1$ por levantamiento de γ_0 a $X_{\mathcal{F}}$ con la condición inicial $\widetilde{\gamma}(0) = e^{F_0}$.

c. Deducir de lo anterior que
$$(\exp \circ F_1)(1) = \lambda_0 \, (\exp \circ F_0)(1).$$

d. Mostrar que
$$\int_{\gamma_0} f(z)\, dz = \big(F_0(-1) - F_0(1)\big) + \big(F_1(1) - F_1(-1)\big)$$
y deducir de ello que
$$\lambda_0 = \exp\left(\int_{\gamma_0} f(z)\, dz\right).$$
Observación: la conclusión del problema es que la representación (2) sólo depende del residuo en su único polo del coeficiente f en la ecuación (1).

e. Calcular $\lambda_0 \in \mathbb{C}^*$ cuando $f(z) = \frac{1}{z}$ en $\mathbb{C}^*$ y determinar $\chi(k) \in \mathbb{C}^*$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ cuando se identifica $\pi_1(\mathbb{C}^*; 1)$ con $\mathbb{Z}$ mediante el generador γ_0.