Parcial 1, duración 2 horas

21 DE SEPTIEMBRE 2012 — FLORENT SCHAFFHAUSER

Cada pregunta vale un punto. No se autorizan las notas de clase ni los libros. Todas las superficies de Riemann consideradas son conexas.

1. Sea X una superficie de Riemann compacta y sea f una función meromorfa en X. Mostrar que si f tiene un solo polo en X y que este polo es de orden 1 entonces X es isomorfa a $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$.

2. Sea $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ una biyección holomorfa del disco $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ a sí mismo tal que $f(0) = 0$. Mostrar que f es una rotación.

3. Sea $\Gamma \subset \mathbf{PSL}(2; \mathbb{R})$ un sub-grupo discreto del grupo de automorfismos de $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$. Mostrar que el estabilizador Γ_{z_0} de un punto $z_0 \in \mathcal{H}$ es un grupo cíclico finito.

4. Se considera el abierto simplemente conexo $\Omega := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ en $\mathbb{C}$. Por el teorema de uniformización, Ω es isomorfo al plano $\mathbb{C}$ o al disco $\mathcal{D}$. ¿Cuál de las dos es la respuesta correcta? Justifique.

5. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que

$$\exists\, A \in \mathbb{R}_+,\ \exists\, B \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leq A + B|z|^k$$

donde $k \in \mathbb{N}$. Mostrar que f es una función polinomial de grado menor o igual a k.

Indicación: se recuerdan las desigualdades de Cauchy para una función entera $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$; para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\forall\, r > 0, |a_n| \leq \frac{1}{r^n} \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

6. Sea Σ una superficie de Riemann compacta de género $g_\Sigma \geq 1$.

a. Mostrar que no existen aplicaciones holomorfas $\mathbb{C}\mathbf{P}^1 \longrightarrow \Sigma$.

b. Mostrar que si existe una aplicación holomorfa $f : \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ que tiene grado 2 y 4 puntos de ramificaión, entonces $g_\Sigma = 1$.