Universidad de Los Andes — Superficies de Riemann

# Examen final, duración 2 horas

28 de noviembre 2012 — Florent Schaffhauser

*Cada pregunta vale un punto. No se autorizan los libros.*

## Ejercicio 1

Sea $X$ una superficie de Riemann compacta y conexa.

**1.** Sea $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ (una función meromorfa no identicamente nula en $X$).

**a.** Mostrar que, teniendo en cuenta sus respectivas multiplicidades, $f$ tiene tantos ceros como polos en $X$.

**b.** Recordar la definición del divisor $D_f : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ asociado a $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$. Mostrar que $D_f$ tiene grado 0.

**2.** Sea $D$ un divisor en $X$ y sea $O_D$ el haz definido, en cada abierto $U$ de $X$, por

$$O_D(U) = \{g \in \mathcal{M}(U) \mid \forall\, x \in U,\, D_g(x) \geq -D(x)\}$$

(se recuerda que si $g \equiv 0$ en $U$, se pone $D_g(x) = +\infty$ para cualquier $x \in U$, de tal manera que siempre se tiene $0 \in O_D(U)$).

**a.** Sea $D'$ otro divisor en $X$, de tal manera que $D' - D = D_f$ para alguna función meromorfa $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$. Exhibir un isomorfismo entre $O_{D'}(U)$ y $O_D(U)$.

**b.** Supongamos que grado$(D) < 0$. Mostrar que $H^0(X; O_D) = \{0\}$.

## Ejercicio 2

Sea $X$ una superficie de Riemann conexa. Sea $\mathcal{A}$ el haz de funciones $C^\infty$ en $X$ y sea $\mathcal{A}^*$ el haz de funciones $C^\infty$ que no se anulan en $X$.

**1.** Mostrar que el homorfismo de haces

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(U) & \longrightarrow & \mathcal{A}^*(U) \\ f & \longmapsto & \exp(i2\pi f) \end{array}$$

da lugar a la sucesión exacta corta de haces

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^* \longrightarrow 1.$$

**2.** Mostrar que se tiene una sucesión exacta

$$H^1(X;\mathcal{A}) \longrightarrow H^1(X;\mathcal{A}^*) \longrightarrow H^2(X;\underline{\mathbb{Z}}). \tag{1}$$

**3.** Sea $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un cubrimiento abierto localmente finito de $X$ y sea $(\psi_i)_{i\in I}$ una partición de la unidad suave subordinada al cubrimiento $\mathcal{U}$:

(1) $\psi_i \in \mathcal{A}(U_i)$ y $\mathrm{supp}(\psi_i) \subset U_i$,
(2) $\sum_{i\in I} \psi_i = 1$.

Sea $(f_{ij})_{(i,j)\in I\times I} \in Z^1(\mathcal{U};\mathcal{A})$ un 1-cociclo con valores en $\mathcal{A}$ y sea

$$g_i = \sum_{k \in I} \psi_k f_{ik}.$$

Mostrar que $g_i \in \mathcal{A}(U_i)$ y que $g_i - g_j = f_{ij}$ en $U_i \cap U_j$.

**4.** Se denota $\delta$ el homomorfismo de $H^1(X;\mathcal{A}^*)$ a $H^2(X;\underline{\mathbb{Z}})$ en la sucesión exacta (1). Mostrar que dos fibrados en rectas *suaves* $L_1$ y $L_2$ en $X$ son isomorfos si y sólo si $\delta(L_1) = \delta(L_2)$.