Hoja de ejercicios 7 : divisores, fibrados en rectas, Riemann-Roch

2012-II — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Sea M una superficie de Riemann y f, g dos funciones meromorfas no identicamente nulas sobre M. Se denota D_h el divisor asociado a una función meromorfa h.
a. Recordar la definición de D_h.
b. Mostrar que $D_{\frac{1}{f}} = -D_f$ y que $D_{fg} = D_f + D_g$.
c. Mostrar que si M es compacta, $\deg D_f = 0$.
d. Mostrar que si D es un divisor sobre M, existe un cubrimineto abierto $(U_i)_{i\in I}$ de M y unas funciones meromorfas no identicamente nulas f_i tal que $D|_{U_i}$ sea el divisor asociado a f_i.
e. Mostar que si $g_i \in O_M^*(U_i)$, el divisor asociado a $f_i g_i$ es igual al divisor asociado a f_i.

Ejercicio 2. Sea (M, O_M) una superficie de Riemann.
a. Mostrar que la succesión

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & O_M & \longrightarrow & O_M^* \\ n & \longmapsto & n & & \\ & & f & \longmapsto & \exp(i2\pi f) \end{array}$$

es una succesión exacta corta de haces.
b. El homomorfismo de conexión en la succesión exacta larga asociada se llama el **grado**

$$\deg\ : \check{H}^1(M; O_M^*) \longrightarrow \check{H}^2(M; \mathbb{Z}).$$

Mostrar que dos fibrados holomorfos en recats sobre $M = \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ son isomorfos si y sólo si tienne mismo grado. *Indicación* : Explicitar la succesión exacta larga de cohomología a la que se aludió anteriormente. Se podrá usar que, cuando M es compacta y conexa, $\dim_{\mathbb{C}} \check{H}^1(M; O_M) = g$, el género de M.

Ejercicio 3. Sea M una superficie de Riemann, $\mathcal{M}_M$ el haz de funciones meromorfas sobre M, D un divisor y U un abierto de M. Se define

$$O_D(U) = \{f \in \mathcal{M}_M(U) \mid D_f \geq -D\}.$$

a. Mostrar que O_D es un haz sobre M.
b. Sea $\mathcal{L}_D$ el fibrado en rectas asociado a D. Mostrar que existe un isomorfismo entre O_D y el haz de secciones holomorfas de $\mathcal{L}_D$.
c. Se acepta que $\deg \mathcal{L}_D = \deg D$. Mostrar que si $\deg \mathcal{L}_D < 0$, entonces $\mathcal{L}_D$ no tiene secciones holomorfas globales que no sean identicamente nulas.

Ejercicio 4. Sea M una superficie de Riemann compacta y conexa de género g y sea $x_0 \in M$.
a. Mostrar que existe una función meromorfa no constante sobre M que tiene un polo de orden a lo sumo $g+1$ en x_0 y que es holomorfa sobre $M \setminus \{x_0\}$. *Indicación* : Considerar el divisor

$$D : x \longmapsto \begin{cases} g+1 & \text{si } x = x_0, \\ 0 & \text{si } x \neq x_0, \end{cases}$$

y aplicar el teorema de Riemann-Roch.
b. Mostrar que existe un cubrimiento ramificado $M \to \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ de grado a lo sumo $g+1$.
c. Se supone ahora que $g = 0$. Mostrar que $M \simeq \mathbb{C}\mathbf{P}^1$.

Ejercicio 5. Se considera la superficie de Riemann $M = \mathbb{C}\mathbf{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y su cubrimiento usual por abiertos de carta, $U_0 = \mathbb{C}$ y $U_1 = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$. Sea D el divisor

$$z \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } z = 0, \\ 0 & \text{si } z \neq 0, \end{cases}$$

y sea $\mathcal{L}_D$ el fibrado en rectas asociado.
a. Mostrar que $\mathcal{L}_D$ se puede representar por el cociclo de funciones de transición determinado por

$$g_{01} : \begin{array}{ccc} U_0 \cap U_1 = \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & z \end{array}.$$

b. Sea

$$\mathcal{H} = \{(\ell, v) \in \mathbb{C}\mathbf{P}^1 \times \mathbb{C}^2 \mid v \in \ell\}.$$

Mostrar que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C}\mathbf{P}^1 \\ (\ell, v) & \longmapsto & \ell \end{array}$$

es un fibrado en rectas sobre $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ y que este fibrado se puede representar por el cociclo de funciones de transición determinado por

$$g_{01} : \begin{array}{ccc} U_0 \cap U_1 = \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & z \end{array}.$$

c. Deducir de lo anterior que $\mathcal{H} \simeq \mathcal{L}_D$ y que $\deg \mathcal{H} = 1$.