Hoja de ejercicios 6 : Haces

2012-II — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{O}$ un abierto de $\mathbb{R}^n$. Mostrar que la correspondancia

$$C^{\infty}_{\mathcal{O}}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ suave}\},$$

donde U es un abierto de $\mathcal{O}$, define un haz de $\mathbb{R}$-álgebras sobre $\mathcal{O}$, llamado el **haz de funciones suaves sobre** $\mathcal{O}$.

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{O}$ un abierto de $\mathbb{R}^n$. Mostrar que la correspondancia

$$\Omega^k_{\mathcal{O}}(U) = \{\alpha : U \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Lambda^k\mathbb{R}^n, \mathbb{R})\},$$

(α es una k-forma diferencial sobre U) donde U es un abierto de $\mathcal{O}$, define un haz de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales sobre $\mathcal{O}$, llamado el **haz de k-formas diferenciales sobre** $\mathcal{O}$. Este haz no es un subhaz del haz de funciones cotinuas sobre $\mathcal{O}$.

Ejercicio 3. Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$.
a. Mostrar que la correspondancia

$$\mathcal{O}_{\Omega}(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorfa}\},$$

donde U es un abierto de Ω, define un haz de $\mathbb{C}$-álgebras sobre Ω, llamado el **haz de funciones holomorfas sobre** U.
b. Mostrar que la correspondancia

$$\mathcal{O}^*_{\Omega}(U) = \{f : U \to \mathbb{C}^* \mid f \text{ holomorfa}\},$$

donde U es un abierto de Ω, define un haz de anillos sobre Ω.

Ejercicio 4. Sea X una superficie de Riemann y $\mathcal{M}(X)$ el conjunto de funciones meromorfas sobre X. Mostrar que $\mathcal{M}(X)$ es un cuerpo. *Indicación* : Mostrar primero que el conjunto de ceros y polos de una función meromorfa es un subconjunto discreto de X.

Ejercicio 5. Sea X una superficie de Riemann y, para cualquier abierto U de X, sea

$$\mathcal{M}_X(U) = \{f : U \to \mathbb{C}\mathbf{P}^1 \mid f \not\equiv \infty\}$$

el conjunto de funciones meromorfas sobre U.
a. Mostrar que $\mathcal{M}_X$ es un haz de $\mathbb{C}$-álgebras sobre X.
b. Sea $x \in X$. Mostrar que la fibra $\mathcal{M}_{X,x}$ del haz de funciones meromorfas es una $\mathbb{C}$-álgebra isomorfa a la $\mathbb{C}$-álgebra $\mathbb{C}\{\{z-x\}\}$ de series de Laurent convergentes

$$\mathbb{C}\{\{z-x\}\} := \left\{ \sum_{k=-n}^{+\infty} c_k(z-x)^k \mid \text{cv} \right\}.$$

Ejercicio 6. Sea (X, O_X) una superficie de Riemann y sea $x \in X$.
a. Mostrar que

$$O_{X,x} := \varinjlim_{U \ni x} O_X(U)$$

es un anillo local cuyo único ideal máximo es $\mathfrak{m}_x := \{f_x \in O_{X,x} \mid f(x) = 0\}$.
b. Mostrar que el cuerpo residual es

$$O_{X,x}/\mathfrak{m}_x \simeq \mathbb{C}.$$

Ejercicio 7. Sea $\mathcal{F}$ un prehaz sobre un espacio topológico X, sea

$$|\mathcal{F}| := \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

y sea

$$p : |\mathcal{F}| \longrightarrow X$$

el homeomorfismo local asociado. Se define, para cualquier abierto U de X,

$$\overline{\mathcal{F}}(U) := \{s : U \to |\mathcal{F}| \mid p \circ s = \mathrm{Id}_U\},$$

el conjunto de secciones continuas de p definidas sobre U.
a. Mostrar que $\overline{\mathcal{F}}$, con las applicaciones de restricción evidentes, es un haz sobre X.
b. Mostrar que existe un homomorfismo de prehaces

$$\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}$$

tal que, para todo $x \in X$,la aplicación inducida

$$\mathcal{F}_x \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}_x$$

es un isomorfismo.
c. Mostrar que si el prehaz $\mathcal{F}$ es un haz, entonces $\overline{\mathcal{F}} \simeq \mathcal{F}$.
d. Mostrar que si $\mathcal{G}$ es un haz sobre X y si

$$f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$$

es un homomorfismo de prehaces, entonces existe un único homomorfismo de haces

$$\overline{f} : \overline{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{G}$$

tal que

$$\overline{f} \circ \varphi = f.$$

e. Sea $\mathcal{F}(U) = \{f : U \to G \mid f \text{ constante}\}$. Mostrar que $\mathcal{F}$ es un prehaz que no cumple con los axiomas de un haz. Determinar el haz $\overline{\mathcal{F}}$ asociado.