Hoja de ejercicios 5 : cubrimientos, fórmula de Riemann-Hurwitz

2012-II — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Se considera la aplicación

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & z^k \end{array}$$

a. Mostrar que p es un cubrimiento topológico finito de grado k.
b. Mostrar que el grupo de Galois (grupo de automorfismos) del cubrimiento p es $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.
c. Mostrar que p es galoisiano. *Indicación* : Se podrá demostrar que $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ actúa de manera transitiva sobre las fibras de p.

Ejercicio 2. Sea X el grupo topológico cociente $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Mostrar que, para cualquier $k \geq 2$, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & (kx_1, \cdots, kx_n) \end{array}$$

induce una aplicación

$$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$$

que es un cubrimiento topológico galoisiano de grupo $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^n$.

Ejercicio 3. Sea $p : Y \to X$ un cubrimiento topológico finito de grado 2. Mostrar que p es galoisiano.

Ejercicio 4. Sea $p : Y \to X$ un cubrimiento topológico y sea $y \in Y$ y $x := p(y)$. Mostrar que el homomorfismo de grupos

$$p_* : \pi_1(Y, y) \longrightarrow \pi_1(X, x)$$

inducido por p es inyectivo.

Ejercicio 5. Mostrar, sin utilizar la relación al género, que la característica de Euler de una suma conexa $X\#Y$ de superficies compactas, conexas y orientables es

$$\chi(X\#Y) = \chi(X) + \chi(Y) - 2.$$

Ejercicio 6. Mostrar que si X es una superficie de Riemann compacta y conexa de género $g_X > 0$, no existen aplicaciones holomorfas no constantes $f : \mathbb{C}\mathbf{P}^1 \to X$.

Ejercicio 7. Sea Y una superficie de Riemann compact y conexa y sea $f : Y \to \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ una aplicación holomorfa no constante. Se supone que f tiene grado 2 y 4 puntos de ramificación.
a.Mostar que la multiplicidad de cada uno de esos puntos es 2.
b. Mostrar que Y es homeomorfo a un toro.

Ejercicio 8. Sea Y una superficie de Riemann compact y conexa y sea $f : Y \to \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ una aplicación holomorfa no constante de grado 2. Se denota S el conjunto de puntos de ramificación de f.
a. Mostar que

$$\mathrm{card}\, S = \sum_{y \in S} (k_y - 1),$$

donde k_y es la multiplicidad de f en $y \in S$.
b. Mostrar que $\mathrm{card}\, S$ es par y que el género g_Y de Y es

$$g_Y = \frac{\mathrm{card}\, S}{2} - 1.$$

Ejercicio 9. Sea $\mathbb{C}(T)$ el cuerpo de fracciones racionales con coeficientes complejos en una variable. Se recuerda que $\mathbb{C}(T)$ es el cuerpo de funciones meromorfas sobre $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$. Sea K un cuerpo que cumple

$$\mathbb{C} \subset K \subset \mathbb{C}(T)$$

y $[\mathbb{C}(T) : K] < +\infty$. Vimos en clase que tal extensión finita $K \subset \mathbb{C}(T)$ correspondía a un cubrimiento finito de superficies de Riemann $\mathbb{C}\mathbf{P}^1 \to X$, donde X es la superficie de Riemann cuyo cuerpo de funciones meromorfas es K. Utilizar el ejercicio 6 para demostrar que K es isomorfo a $\mathbb{C}(T)$. Esta última aserción es puramente algebraica y se conoce como el *teorema de Lüroth*.

Ejercicio 10. Sea Y una superficie de Riemann compacta y conexa y sea G un subgrupo finito de $\mathrm{Aut}(Y)$.
a. Mostrar que la proyección canónica

$$p : Y \longrightarrow Y/G$$

es un cubrimiento ramificado.
b. Mostrar que los puntos de ramificación de p son exactamente los puntos y de Y que tienen un establizador G_y no trivial en G.
c. Utilizando la forma normal local de una aplicación holomorfa, mostar que el estabilizador de un punto de ramificación de p es un grupo cíclico de orden k_y, la multiplicidad de p en este punto. *Indicación* : Utilizar el ejercicio 1.