Hoja de ejercicios 4 : grado de una aplicación, cubrimientos

2012-II — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Determinar los puntos críticos y los valores críticos de las siguientes aplicaciones.
a.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}\mathbf{P}^1 \\ z & \longmapsto & z + \frac{1}{z} \end{array}$$

b.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^3 - 3z \end{array}$$

Ejercicio 2. a. Sea Y una superficie de Riemann compacta y conexa y sea $f : Y \to \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ una aplicación holomorfa (=una función meromorfa sobre Y) que no es constante. Mostrar, tomando en cuenta las multiplicidades (=los órdenes) de los ceros y de los polos de f, que f tiene tanto ceros como polos sobre Y.
b. Deducir de lo anterior el teorema de Gauss : Un polinomio

$$f(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$$

de grado $n > 0$ tiene, tomando en cuenta las multiplicidades, exactamente n ceros sobre $\mathbb{C}$. *Indicación* : Se podrá considerar f como una aplicación holomorfa $\mathbb{C}\mathbf{P}^1 \to \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ y mostrar que el grado de f en ∞ es

$$\mathrm{gr}(f; \infty) = n$$

(es decir, f toma el valor infinito con multiplicidad n).

Ejercicio 3. Sea Y una superficie de Riemann compacta y conexa y sea $f : Y \to \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ una aplicación holomorfa (=una función meromorfa sobre Y) que no es constante. Se supone que f tiene un solo polo y que este polo es de orden 1. Mostrar que f es un isomorfismo de superficies de Riemann.

Ejercicio 4. Mostrar que una aplicación continua $p : Y \to X$ entre espacios topológicos separados es propia si y sólo si f es cerrada y sus fibras son compactas.

Ejercicio 5. Mostrar que un cubrimiento topológico finito es una aplicación propia.

Ejercicio 6. Mostar que un homeomorfismo local $p : Y \to X$ que además es una aplicación propia es un cubrimiento topológico finito. *Indicación* : Eso es un caso particular de un teorema visto en clase, en que p era una aplicación holomorfa no ramificada y propia, luego un homeomorfismo local propio.

Ejercicio 7. Mostrar que un homeomorfismo local que tiene la propiedad de levantamiento para curvas es un cubrimiento topológico (eso caracteriza los cubrimientos topológicos entre los homeomorfismos locales). *Indicación* : Ver Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Teorema 4.19.

Ejercicio 8. a. Mostrar que la aplicación

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^k \end{array}$$

es una aplicación holomorfa propia y determinar sus puntos de ramificación.
b. Mostrar que la aplicación

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & \exp(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \end{array}$$

es holomorfa y no que tiene puntos de ramificación. Mostrar que no es una aplicación propia.
c. Sea $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un retículo y sea $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ la proyección canónica. Mostrar que p no tiene puntos de ramificación y que no es propia.
d. Mostrar que $f|_{\mathbb{C}^*}$, exp y p son cubrimientos topológicos.

Ejercicio 9. Sea $n > 1$ y sea μ_n el grupo de raices n-ésimas de la unidad en $\mathbb{C}$. La multiplicación por un elemento de μ_n define una acción de μ_n sobre $\mathbb{C}^*$.
a. Mostrar que la proyección canónica

$$p : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*/\mu_n$$

es un cubrimiento topológico. *Indicación* : Se podrá utilizar el criterio visto en clase para acciones de grupos que definen un cubrimiento.
b. Mostar que la aplicación $z \mapsto z^n$ induce un isomorfismo de grupos topológicos (=un isomorfismo de grupos que es un homeomorfismo)

$$\mathbb{C}^*/\mu_n \longrightarrow \mathbb{C}^*.$$

c. Mostrar que el cubrimiento p compuesto con este isomorfismo es un cubrimiento de $\mathbb{C}^*$ isomorfo a $z \mapsto z^n$.