

Hoja de ejercicios 2 : Funciones meromorfas, esfera de Riemann

2012-II

FLORENT SCHAFFHAUSER

EJERCICIO 1. Sea f una función meromorfa sobre un abierto U de \mathbb{C} y sea z_0 un polo de f en U .

a. Mostrar que existe una función holomorfa $h : D(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ y un único entero $n > 0$ tal que $h(z_0) \neq 0$ y, si $z \neq z_0$,

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^n}.$$

El entero n se llama el **orden** del polo z_0 . *Indicación:* Se podrá expandir $1/f$ en serie de potencias alrededor de z_0 .

b. Mostrar que si z_0 es un polo de orden n de f , entonces existen un $R > 0$ y una sucesión $(a_k)_{k \geq -n}$ de números complejos tales que, para cualquier $r \in]0; R[$, se tiene : si $z \in U$ es tal que $r < |z - z_0| < R$, entonces

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$$

con $a_{-n} \neq 0$. Semejante expansión se llama una **expansión en serie de Laurent de f alrededor de z_0** . La parte $\frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0}$ se llama la **parte principal** de f en z_0 .

EJERCICIO 2. Sea f una función meromorfa sobre un abierto U de \mathbb{C} y sea $D(z_0; r)$ un disco cerrado contenido en U .

a. Mostrar que f tiene un número finito de polos y de ceros en $D(z_0; r)$.

b. Se nota

$$Z(f) = \{c_1, \dots, c_k\}$$

el conjunto de ceros de f en $D(z_0; r)$ y $ord(c_i)$ el orden del cero c_i . De manera similar, se nota

$$P(f) = \{p_1, \dots, p_l\}$$

el conjunto de polos de f en $D(z_0; r)$ y $ord(p_j)$ el orden del polo p_j . Mostrar que si $Z(f)$ y $P(f)$ están contenidos en el disco abierto $D(z_0; r)$, entonces

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma(z_0; r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= \sum_{i=1}^k ord(c_i) - \sum_{j=1}^l ord(p_j). \end{aligned}$$

EJERCICIO 3. Se considera la siguiente relación de equivalencia sobre $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$: $(z_0, z_1) \sim (w_0, w_1)$ si existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $(z_0, z_1) = (\lambda w_0, \lambda w_1)$. Se denota $[z_0, z_1]$ la clase de equivalencia de (z_0, z_1) por esta relación y $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ el espacio topológico

$$\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} / \sim$$

(con la topología cociente). Este espacio se llama la **recta proyectiva compleja**.

a. Sea

$$V_i = \{[z_0, z_1] \in \mathbb{C}\mathbf{P}^1 \mid z_i \neq 0\}$$

para $i = 1, 2$. Mostrar que V_i es un abierto de $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ y que las aplicaciones

$$\psi_0 : \begin{cases} V_0 & \longrightarrow \mathbb{C} \\ [z_0, z_1] & \longmapsto \frac{z_1}{z_0} \end{cases}$$

y

$$\psi_1 : \begin{cases} V_1 & \longrightarrow \mathbb{C} \\ [z_0, z_1] & \longmapsto \frac{z_0}{z_1} \end{cases}$$

son homeomorfismos de V_i sobre \mathbb{C} .

b. Mostrar que las funciones de transición del cubrimiento $V_0 \cup V_1 = \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ así definido son holomorfas.

c. Se usa la notación introducida en clase. Mostrar que existe una biyección biholomorfa

$$f : \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C}\mathbf{P}^1$$

(es decir, una aplicación continua f tal que $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ es holomorfa para cualquier par (i, j) que cumpla $f(U_i) \subset V_j$).

EJERCICIO 4. Se propone determinar las funciones meromorfas sobre $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$.

a. Mostrar que una fracción racional P/Q , donde P y Q son polinomios con coeficientes complejos, define una función meromorfa sobre $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$.

b. Sea $f : \mathbb{C}\mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ una aplicación holomorfa (=una función meromorfa sobre $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$). Mostrar que f es una función racional (es decir, proviene de una fracción racional como en el punto anterior). *Indicación:* Se podrá suponer que ∞ no es un polo de f (si es un polo, considerar $1/f$) y mostrar que la expresión $f - (h_1 + \cdots + h_s)$, donde s es el número de polos de f en $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ y h_j la parte principal de f en el polo p_j , define una función **holomorfa** sobre $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$.