Algebra lineal MATE1105

Programa 2012

Introducción:

Este curso empieza con una introducción geométrica de vectores que posteriormente son presentados de manera más formal desde un punto de vista algebraico, introduciéndonos en los espacio euclidiano R^2 y R^3 que luego son generalizados a R^n. En R^2 y R^3, se detallan las líneas y los planos para dar sentido geométrico a las soluciones de los sistemas lineales. Más adelante se da paso a los espacios vectoriales generales, donde además de los espacios R^n se estudian los espacios de matrices y de polinomios, junto con los conceptos de dependencia e independencia lineal, conceptos fundamentales en el álgebra lineal. Luego se estudia un tipo de función entre
espacios vectoriales (las transformaciones lineales) y se explora la idea de que las matrices no son entes estáticos meramente, sino mas bien, un tipo de función, que transforma vectores en otros vectores, con éstas ideas se presenta la teoría básica de valores y vectores propios y se concluye en el importante tema de la diagonalización. Por último se estudia la ortogonalidad a partir de la proyección de un vector sobre un subespacio, desarrollándose el proceso de Gram-Schmidt, para obtener conjuntos de vectores ortogonales y ortonormales.

Justificación:

Muchos problemas en física, ingeniería, biología, química, medicina, gráficas por computador, procesamiento de imágenes, economía, sociología y en general las principales ramas de la Matemática moderna pueden ser descritos mediante modelos lineales en los cuales se describe la relación de una variable con una o más variables.

Además de la explicita componente matemática en muchos de estos dominios, es necesario que los futuros estudiantes se armen de elementos matemáticos que faciliten su formación rigurosa como Matemático, Ingeniero o Tecnólogo a través de la resolución de problemas de diferente nivel conceptual y motivados, no solo por esas necesidades, sino también en el desarrollo del espíritu científico de los estudiantes, absolutamente necesario para abordar sus futuros retos como profesionales.

Objetivos:

1. Mostrar el papel del Álgebra Lineal como instrumento eficaz para modelar y resolver problemas que surgen en diversos ámbitos de la ciencia y la tecnología.
2. Reconocer y emplear la eliminación Gaussiana para resolver sistemas lineales pequeños.
3. Adquirir una idea de las cuantiosas aplicaciones de los sistemas lineales.
4. Entender y aplicar correctamente las propiedades básicas de los vectores y las matrices
5. Reconocer y emplear algunos programas computacionales (Maple, Mathematica, Mathlab, derive, etc) que le ayuden a resolver problemas en la práctica.

6. Comprender la geometría de los vectores y la relación entre los sistemas lineales y las ecuaciones vectoriales.
7. Interpretar una matriz como una transformación lineal entre espacios vectoriales.
8. Comprender y reconocer la gran utilidad de los valores y vectores propios en las diferentes áreas del conocimiento.
9. Abordar, modelar y resolver gran variedad de problemas de la vida real.

Objetivos Específicos:

- Comprender y ejercitar la aritmética vectorial básica y su geometría.
- Comprender la relación existente entre sistemas lineales y ecuaciones vectoriales.
- Reconocer y emplear la eliminación Gaussiana para resolver un sistema lineal sencillo.
- Describir las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, mediante la suma de una solución particular más todas las soluciones del sistema homogéneo asociado.
- Identificar y calcular la inversa de una matriz, cuando exista.
- Calcular la longitud de un vector, el producto punto y el ángulo entre vectores.
- Comprender, algebraicamente y geométricamente, el espacio generado por un conjunto de vectores.
- Comprender e interpretar geométricamente el concepto de dependencia e independencia lineal.
- Formular e identificar la ecuación de un plano y de una recta en el espacio.
- Comprender y manejar las operaciones básicas de matrices. Resolver ecuaciones matriciales.
- Decidir cuando una matriz pequeña posee o no inversa y si la posee hallarla.
- Conocer qué es una combinación lineal de vectores y comprender su geometría.
- Reconocer cuando un conjunto de vectores es o no un espacio vectorial.
- Conocer qué es una base y como usarla.
- Comprender el concepto de dimensión de un espacio vectorial.
- Calcular el vector de coordenadas con respecto a una base dada.
- Obtener la matriz de cambio y aplicarla para cambiar de una base a otra.
- Determinar las bases para los espacios nulo (de renglones) y de columnas de una matriz.
- Comprender y aplicar el teorema del rango.
- Comprender qué es una transformación lineal y su representación matricial.
- Comprender geométricamente las transformaciones matriciales básicas de R^2
- Determinar el núcleo y la imagen de una transformación lineal.
- Calcular la matriz de una transformación lineal con respecto a una nueva base.
- Conocer las operaciones con las transformaciones lineales y la forma en que se relacionan con las operaciones matriciales.
- Calcular el producto cruz de dos vectores y comprender su geometría.
- Comprender y aplicar las propiedades básicas del producto cruz.

- Reconocer las propiedades básicas de los determinantes y aplicarlas en el cálculo del determinante de una matriz.
- Simplificar los determinantes mediante una reducción correcta de renglones o de columnas.
- Resolver sistemas lineales aplicando la regla de Cramer.
- Definir y calcular los valores y vectores propios de una matriz.
- Conocer cuáles matrices pueden diagonalizarse y cuáles no.
- Diagonalizar una transformación lineal.
- Calcular la proyección ortogonal de un vector sobre otro.
- Calcular la proyección ortogonal de un vector sobre un espacio vectorial.
- Conocer y definir las propiedades básicas de los conjuntos ortogonales y ortonormales.
- Conocer la definición y las propiedades básicas de las matrices ortogonales.
- Comprender el concepto y las propiedades de la proyección ortogonal.
- Hallar una base ortonormal a partir de una base dada de un subespacio.
- Aprender a diagonalizar ortogonalmente una matriz simétrica.
- Identificar una sección cónica que no esté en la posición canónica.

Contenido:

1. **Sistemas lineales:** Muchas preguntas en ingeniería, física, matemáticas economía, ciencias sociales y otras ciencias se reducen en últimas al problema de resolver un sistema de ecuaciones lineales**.** Aquí se enfatiza principalmente en la eliminación Gaussiana, pasando por los sistemas lineales homogéneos. Los ejemplos de esta sección contribuyen a que el alumno aprecie la aplicabilidad de los sistemas lineales.
2. **Vectores:** Algunas cantidades pueden ser determinadas con un número, su magnitud. Otras como: el desplazamiento, la velocidad y la fuerza necesitan, además de su magnitud, su dirección para ser descritas completamente. Las tres anteriores son ejemplos de vectores.

   Se describen las operaciones vectoriales, el producto escalar, el producto vectorial y la Ortogonalidad en R^n**.**

3. **Matrices:** Aparece este concepto como respuesta a la necesidad de simplificar la escritura de los sistemas lineales. Se estudian sus propiedades y sus aplicaciones, el determinante de una matriz cuadrada que nos proporciona fórmulas que permiten el calculo de áreas y volúmenes.
4. **Espacios vectoriales:** Se generalizan los conceptos básicos de vectores y matrices. Las propiedades comunes de la aritmética vectorial y matricial son tomadas como las propiedades de un conjunto de vectores abstractos, llamado espacio vectorial. Dentro de esta gran gama de espacios vectoriales se estudian en particular los espacios

$\Re^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) / x_i \in \Re, i = 1,2,..\}$,
$P_n = \{Polinomios\ de\ grado\ a\ lo\ mas\ n / n \in N\}$ y el espacio de las matrices

$$M_{mxn} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} / a_{ij} \in \Re, i = 1..m, j = 1..n \right\}$$

Entre las muchas ventajas de esta generalización se encuentra el hecho de que las propiedades de estos espacios generalizados se aplican a todos los demás ejemplos particulares.

5. **Transformaciones lineales:** Se trata aquí de implementar las funciones entre espacios vectoriales, las cuales no necesariamente podemos obtener información de su gráfica de hecho muchas de estas transformaciones no es posible realizar una gráfica análoga a las graficas de funciones entre números reales, pero, podemos representar cierta información parcial estudiando su geometría.
6. **Valores y vectores propios:** Es de trascendental importancia en una gran variedad de problemas de aplicación, poder encontrar los vectores v de manera que este vector y el vector Av, donde A es una matriz cuadrada, sean paralelos. Estas aplicaciones son frecuentes en aerodinámica, elasticidad, física nuclear, mecánica, etc.
7. **Semejanza y diagonalización:** Se describe una relación bastante útil que se puede cumplir entre dos matrices, concluyendo uno de los resultados importantes de matrices (toda matriz cuadrada con n valores propios reales y distintos puede escribirse como una matriz diagonal, con los mismos valores propios).

Texto guía:

Fraleigh, Beauregard. Linear Algebra. 3a Ed. Addison Wesley. 1995.

Bibliografía Adicional:

José Rodríguez/José López. Algebra Lineal, 2010.

Stanley, Grossman; Algebra Lineal. 6a. Ed. Mc Graw Hill 2005.

Otto, Bretscher; Varberg. Linear Algebra, With Applications. 4th Ed. Pearson, 2009.

Otto Bretscher, Linear Algebra, With Applications. Fourth Edition. Pearson. 2009.

Coordinador: Prof. José Darío López G. (jlopez@uniandes.edu.co)