Tarea : Para entregar el 22 de marzo.

2012-I — Florent Schaffhauser

Son 5 ejercicios. Cada pregunta vale un punto. La calidad de la redacción entra por una parte importante en la evaluación del trabajo.

Ejercicio 1

Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en un abierto de $\mathbb{C}$ y sea $\overline{D} := D(z_0; r_0] \subset U$ un disco cerrado contenido en U. Se denota $D = D(z_0; r_0)$ el interior de este disco. Se supone a continuación que $f(z) \neq 0$ en ∂D.

a. Mostrar que el número de soluciones de la ecuación $f(z) = 0$ en D, contadas con sus respectivas multiplicidades, es igual a

$$\frac{1}{i2\pi} \int_{\partial D} \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw$$

donde ∂D tiene la parametrización natural $\gamma(t) = z_0 + r_0 e^{i2\pi t}$, $0 \leq t \leq 1$.

b. Mostrar que si la ecuación $f(z) = 0$ tiene una única solución z_1 en D, entonces

$$z_1 = \frac{1}{i2\pi} \int_{\partial D} \frac{w f'(w)}{f(w)}\, dw.$$

Ejercicio 2

Sea f una biyección holomorfa entre superficies de Riemann. Mostrar que f^{-1} es holomorfa.

Indicación: Utilizar la forma normal local de una función holomorfa.

Ejercicio 3

Sea

$$\Gamma := \{(\gamma_n : z \longmapsto z + n2\pi) : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) = \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})/\{\pm \mathrm{Id}\}.$$

a. Mostrar que Γ es un sub-grupo discreto de $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ que actúa libremente en

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Indicación: Para mostrar que Γ es discreto en $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$, es suficiente demostrar que Id tiene una vecindad en $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ cuya intersección con Γ es $\{\mathrm{Id}\}$. Se recuerda que $\gamma \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ actúa en $\mathcal{H}$ por

$$z \longmapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ cumplen $ad - bc = 1$ y que la distancia entre γ y Id en $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ es (por ejemplo) $\text{máx}(|a|, |b|, |c|, |d|)$.

b. Mostrar que se tiene una biyección biholomorfa

$$\mathcal{H}/\Gamma \simeq D^*(0; 1)$$

(el disco punteado de centro 0 y radio 1).

Ejercicio 4

Sea U un abierto *conexo* de $\mathbb{C}$. Mostrar que el anillo $O(U)$ de funciones holomorfas en U es un anillo de integridad.

Indicación: Se recuerda que si U es conexo, los ceros de una función holomorfa no constante en U conforman un sub-conjunto de U que no tiene puntos de acumulación.

Ejercicio 5

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un elemento de $\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$ y denotemos γ_A el correspondiente automorfismo de $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$:

$$\gamma_A : z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}\cdot$$

Se ve $\mathcal{H}$ como un subconjunto de la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, de tal manera que $\partial\mathcal{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Se recuerda que $\operatorname{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) = \mathbf{PSL}(2,\mathbb{C})$, así que $\mathbf{PSL}(2,\mathbb{R}) \subset \mathbf{PSL}(2,\mathbb{C})$ también actúa en $\widehat{\mathbb{C}}$, preservando $\partial\mathcal{H}$.

a. Mostrar que si $|\operatorname{tr} A| < 2$, entonces γ_A tiene exactamente un punto fijo en $\mathcal{H}$.

b. Mostrar que si $|\operatorname{tr} A| = 2$ y $\gamma_A \neq \operatorname{Id}_{\mathcal{H}}$, entonces γ_A no tiene puntos fijos en $\mathcal{H}$ y exactamente un punto fijo en $\partial\mathcal{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

c. Mostrar que si $|\operatorname{tr} A| > 2$, entonces γ_A no tiene puntos fijos en $\mathcal{H}$ y que tiene dos puntos fijos en $\partial\mathcal{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

d. Los elementos de $\mathbf{PSL}(2,\mathbb{R})$ se pueden clasificar según su número de puntos fijos :

- si γ_A tiene un punto fijo en $\mathcal{H}$, se dice que es una transformación *elíptica.*
- si γ_A tiene un punto fijo en $\mathbb{R} \cup \{\infty\} = \partial\mathcal{H}$, se dice que es una transformación *parabólica.*
- si γ_A tiene dos puntos fijos en $\partial\mathcal{H}$, se dice que es una transformación *hiperbólica* (o *loxodrómica*).

Para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$, mostrar que se tiene la siguiente tabla para el tipo de γ_A y completarla :

	$c \neq 0$	$c = 0$
$\lvert\operatorname{tr} A\rvert < 2$	γ_A elíptica, fija un punto en $\mathcal{H}$	?
$\lvert\operatorname{tr} A\rvert = 2$	γ_A parabólica que fija un punto en $\mathbb{R}$	$\gamma_A = \operatorname{Id}_{\mathcal{H}}$ ó γ_A parabólica que fija ∞
$\lvert\operatorname{tr} A\rvert > 2$	γ_A hiperbólica que fija dos puntos en $\mathbb{R}$	γ_A hiperbólica que fija ∞ y un punto en $\mathbb{R}$