Solución de la tarea

Ejercicio 1

a. $\overline{D}$ es compacto y f es holomorfa, por lo que la ecuación $f(z) = 0$ tiene un número finito de soluciones distintas $\{z_1; \cdots; z_n\}$ en D. Por hipótesis sobre f, $z_j \notin \partial D$ para $j = 1, \cdots, n$. Luego $\frac{f'}{f}$ es una función meromorfa en D, cuyos polos son los ceros de f. Sea k_j el orden de f en z_j. Entonces, alrededor de z_j, se tiene

$$f(w) = a_{k_j}(w - z_j)^{k_j}\, h_j(w)$$

con $a_{k_j} \neq 0$, h_j holomorfa y $h_j(w) \neq 0$ alrededor de z_j. Luego, para $w \neq z_j$,

$$\frac{f'(w)}{f(w)} = \frac{k_j}{w - z_j} + \frac{h_j'(w)}{h_j(w)}$$

(con $\frac{h_j'}{h_j}$ holomorfa) alrededor de z_j. Luego

$$\mathrm{Res}_{w=z_j} \frac{f'(w)}{f(w)} = k_j.$$

El índice del camino $\gamma : t \longmapsto z_0 + r_0 e^{i2\pi t}$ alrededor de cada z_j es 1. Luego, por el teorema de Cauchy, se tiene

$$\frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}_{w=z_j} \frac{f'(w)}{f(w)} = \sum_{j=1}^{n} k_j$$

y esta suma es el número de soluciones de la ecuación $f(z) = 0$ en D, contadas con sus respectivas multiplicidades.

b. Como anteriormente, se tiene, para $w \neq z_j$,

$$\frac{wf'(w)}{f(w)} = \frac{wk_j}{w - z_j} + \frac{wh_j'(w)}{h_j(w)}$$

alrededor de z_j. Ya que estamos suponiendo ahora que $n = 1$ y $k_1 = 1$, se tiene, por el teorema de Cauchy,

$$\frac{1}{i2\pi} \int_{\partial D} \frac{wf'(w)}{f(w)}\, dw = z_1.$$

Ejercicio 2

La cuestión es local. Por la forma normal local, existen unas cartas holomorfas (U, φ) en x y (V, ψ) en $y = f(x)$ tal que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^k$$

para $z \in \varphi(U) = D(0; r)$. Pero f es biyectiva, entonces $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es biyectiva en $D(0; r)$, luego $k = 1$ y $f^{-1} = \psi^{-1} \circ \psi$ es holomorfa en V.

Ejercicio 3

Para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$, se denota $\gamma_A : z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$.

a. Γ es un sub-grupo de $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$, isomorfo a $\mathbb{Z}$ como grupo abstracto. Sea

$$B = \{\gamma_A \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \mid \|\gamma_A\| := \max(|a|; |b|; |c|; |d|) < 1\}$$

la bola unidad de $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$. Entonces

$$B \cap \Gamma = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}\}$$

pues cualquier $\gamma \neq \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ en Γ tiene norma $\|\gamma\| = |n| \geq 1$. Luego Γ es discreto en $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$. Si $\gamma \in \Gamma$ fija $z \in \mathcal{H}$, entonces

$$z = z + n2\pi$$

luego $n = 0$ y $\gamma = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$, lo cual demuestra que la acción de Γ en $\mathcal{H}$ es libre.

b. Consideremos la aplicación holomorfa

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^{iz}. \end{array}$$

Ya que $\operatorname{Im} z > 0$, $|e^{iz}| \in]0; 1[$ y la imagen de φ es $D^*(0; 1)$. Si $\varphi(z) = \varphi(w)$, entonces existe un único $\gamma \in \Gamma$ tal que $w = \gamma(z)$. Luego φ induce una biyección biyectiva y holomorfa (y por lo tanto biholomorfa)

$$\overline{\varphi} : \mathcal{H} \xrightarrow{\simeq} D^*(0; 1).$$

Ejercicio 4

Sean $f, g \in O(U)$ tales que $fg = 0$ en U. Supongamos que existe $z \in U$ tal que $f(z) \neq 0$. Entonces $f(w) \neq 0$ para w en una vecindad abierta V de z. Luego $g = 0$ en el abierto V y, por el principio de los ceros aislados, $g = 0$ en el abierto conexo $U \subset V$.

Ejercicio 5

Un punto fijo de $\gamma_A : z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$ en $\mathbb{C}$ es una solución de la ecuación

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0, \tag{1}$$

cuyo discriminante (cuando $c \neq 0$) es

$$\Delta = (d - a)^2 + 4bc = (a + d)^2 - 4 = (\operatorname{tr} A)^2 - 4$$

(teniendo en cuenta que $ad - bc = 1$). Se recuerda que $\gamma_A = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ si y solamente si $A = \pm\mathrm{Id}$.

a. Si $|\operatorname{tr} A| < 2$ y $c \neq 0$, entonces $\Delta < 0$, por lo que (1) tiene una única solución en $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$. Si $c = 0$, entonces $ad = 1$ y $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 < 4$, lo cual es equivalente a $(a^2 - 1)^2 < 0$: imposible.

b. Si $|\operatorname{tr} A| = 2$ y $c \neq 0$, entonces $\Delta = 0$, por lo que (1) tiene una única solución que además pertenece a $\mathbb{R}$. Si $c = 0$, entonces $a^2 = 1$ luego, ya que $d = \frac{1}{a}$, $\gamma_A = (z \longmapsto z + ab)$ con $ab \in \mathbb{R}$ y $a = \pm 1$. Si $b = 0$, $\gamma_A = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ y, si $b \neq 0$, γ_A es una traslación no trivial en $\mathcal{H}$, que fija ∞ en el sentido que $\lim_{|z| \to +\infty} |\gamma_A(z)| = +\infty$.

c. Si $|\operatorname{tr} A| > 2$ y $c \neq 0$, entonces $\Delta > 0$, por lo que (1) tiene dos soluciones distintas, ambas en $\mathbb{R}$. Si $c = 0$, entonces $d = \frac{1}{a}$ y $\left|a + \frac{1}{a}\right| > 2$ luego $a^2 \neq 1$. Luego $\gamma_A = (z \longmapsto a^2 z + ab)$, la cual fija $\frac{-ab}{a^2 - 1} \in \mathbb{R}$ e ∞.

d. Por los numerales anteriores, se tiene la siguiente tabla:

	$c \neq 0$	$c = 0$
$\lvert\operatorname{tr} A\rvert < 2$	γ_A elíptica, fija un punto en $\mathcal{H}$	imposible
$\lvert\operatorname{tr} A\rvert = 2$	γ_A parabólica que fija un punto en $\mathbb{R}$	$\gamma_A = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ ó γ_A parabólica que fija ∞
$\lvert\operatorname{tr} A\rvert > 2$	γ_A hiperbólica que fija dos puntos en $\mathbb{R}$	γ_A hiperbólica que fija ∞ y un punto en $\mathbb{R}$