Universidad de Los Andes — Geometria algebraica real

Solución del parcial

16 de abril 2012 — Florent Schaffhauser

Preguntas del curso

1. Supongamos que A es un anillo local y sea $\mathfrak{m}$ su único ideal máximo. Entonces $\mathfrak{m} \subset A \setminus A^\times$. Sea entonces $x \in A \setminus A^\times$ y $I := (x) \subsetneq A$, el ideal generado por x. Ya que A es local $I \subset \mathfrak{m}$, luego $x \in \mathfrak{m}$ y, por lo tanto, $A \setminus A^\times \mathfrak{m}$. Luego $A \setminus A^\times = \mathfrak{m}$ es un ideal.

Supongamos ahora que $A \setminus A^\times$ es un ideal y sea $\mathfrak{m}$ un ideal máximo de A. Ya que $\mathfrak{m} \subset A \setminus A^\times$ y que $A \setminus A^\times$ es un ideal propio de A, se tiene que $\mathfrak{m} = A \setminus A^\times$. Luego el único ideal máximo de A es $A \setminus A^\times$ y A es local.

2. Una valuación en K es una aplicación

$$\nu : K \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

tal que

1. $\nu(x) = \infty$ si y solamente si $x = 0$,
2. $\forall x, y \in K, \nu(x+y) \geq \text{mín}(\nu(x), \nu(y))$,
3. $\forall x, y \in K, \nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$.

La propiedad 1 implica que $0 \in R_\nu$ y la propiedad 2 implica que la suma de dos elementos de R_ν está en R_ν. Por el punto 3, el producto de dos elementos de R_ν está en R_ν. Además $\nu(1) = \nu(1 \times 1) = \nu(1) + \nu(1)$ en $\mathbb{R}$ luego $\nu(1) = 0$ y $1 \in R_\nu$. Por lo tanto, R_ν es un sub-anillo de K.

Para mostrar que R_ν es local con ideal máximo $I_\nu = \{x \in K \mid\ u(x) > 0\}$, es suficiente mostrar que I_ν es un ideal y que $R_\nu \setminus R_\nu^\times = I_\nu$. Por definición de I_ν, se tiene $I_\nu \subset R_\nu$ y además:

- $0 \in I_\nu$,
- $(x, y \in I_\nu) \Rightarrow \nu(x+y) \geq \text{mín}(\nu(x), \nu(y)) > 0$ luego $(x+y) \in I_\nu$,
- $(a \in R_\nu, x \in I_\nu) \Rightarrow \nu(ax) = \nu(a) + \nu(x) \geq \nu(x) > 0$ luego $ax \in I_\nu$,

por lo que I_ν es un ideal de R_ν.

Ahora queremos mostrar que $R_\nu \setminus R_\nu^\times = I_\nu$, lo cual es equivalente a que

$$R_\nu^\times = \{x \in R_\nu \mid \nu(x) = 0\}.$$

Si $x \in R_\nu^\times$, entonces por un lado

$$\nu(x) + \nu(x^{-1}) = \nu(xx^{-1}) = \nu(1) = 0$$

y por otro lado $\nu(x) \geq 0$ y $\nu(x^{-1}) \geq 0$. Luego $\nu(x) = \nu(x^{-1}) = 0$. Recíprocamente, si $x \in R_\nu$ cumple con $\nu(x) = 0$, entonces $x \neq 0$ y, si se denota y su inverso en el cuerpo K, se tiene

$$\nu(y) = \nu(x) + \nu(y) = \nu(xy) = \nu(1) = 0,$$

por lo que $y \in R_\nu$ y x es invertible en R_ν. Luego

$$R_\nu^\times = \{x \in R_\nu \mid \nu(x) = 0\}.$$

3. Sea Σ una superficie de Riemann compacta y conexa de género $g = 1$ y sea ω una 1-forma holomorfa no identicamente nula en Σ. Sabemos que la suma de los órdenes de los ceros de ω en Σ menos la suma de los órdenes de los polos de ω en Σ es igual a $2g - 2 = 0$. Al ser holomorfa, ω no tiene polos, luego no puede tener ceros tampoco.

4. Por la fórmula de Riemann-Hurwitz,

$$\chi(X) = d\chi(Y) - R_f$$

donde

$$R_f = \sum_{x \in \text{Crít}(f)} (ord(f; x) - 1)$$

es el índice de ramificación total de f. Ya que $\chi(X) = \chi(Y)$, se tiene

$$R_f = (d-1)\chi(X).$$

Pero $R_f \geq 0$ y $\chi(X) = 2 - 2g(X) < 0$, luego $d = 1$ y $R_f = 0$, por lo que f es un isomorfismo.

Problema

1. Σ es la curva afín plana de ecuación $P(z,w) = 0$, donde $P(z,w) = w^2 - z$. Se tiene $\frac{\partial P}{\partial z}(z,w) = -1$ por lo que las derivadas parciales de P nunca son simultáneamente nulas en Σ (es decir: Σ es suave) y esto implica que Σ admite una estructura de superficie de Riemann.

2. La homogeneización de P es

$$p(Z_0, Z_1, Z_2) = Z_0^2 P\left(\frac{Z_1}{Z_0}, \frac{Z_2}{Z_0}\right) = Z_2^2 - Z_1 Z_0,$$

por lo que

$$\overline{\Sigma} = \{[Z_0 : Z_1 : Z_2] \in \mathbb{C}\mathbf{P}^2 \mid Z_2^2 - Z_0 Z_1 = 0\}.$$

El sistema

$$\frac{\partial p}{\partial Z_0} = \frac{\partial p}{\partial Z_1} = \frac{\partial p}{\partial Z_2} = 0$$

tiene como única solución $Z_0 = Z_1 = Z_2 = 0$ en $\mathbb{C}^3$. Luego la curva proyectiva plana $\overline{\Sigma}$ es suave y por lo tanto admite una estructura de superficie de Riemann.

3. Ya que $\mathbb{C}\mathbf{P}^1 = \{[Z_0 : Z_1 : Z_2] \in \mathbb{C}\mathbf{P}^2 \mid Z_0 = 0\} \subset \mathbb{C}\mathbf{P}^2$, se tiene

$$\overline{\Sigma} \cap \mathbb{C}\mathbf{P}^1 = \{[Z_0 : Z_1 : Z_2] \in \mathbb{C}\mathbf{P}^2 \mid Z_0 = 0 \text{ y } Z_2^2 = 0\} = \{[0 : 1 : 0]\}.$$

Es decir, $\overline{\Sigma} = \Sigma \sqcup \{[0 : 1 : 0]\}$.

4. Mostremos que el polinomio $P = w^2 - z \in \mathbb{C}[z,w]$ es irreducible en $\mathbb{C}[z,w] \simeq \mathbb{C}[w][z]$. Ya que P tiene grado 1 en z, $w^2 - z$ es irreducible en $\mathbb{C}[w][z] \simeq \mathbb{C}[z,w]$. Luego

$$\Sigma = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z,w) = 0\}$$

es conexa, por lo que $\overline{\Sigma}$ también lo es. El polinomio P tiene grado $d = 2$, luego el género de $\overline{\Sigma}$ es

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} = 0.$$

5. Si $[Z_0 : Z_1 : Z_2] \in \overline{\Sigma} \subset \mathbb{C}\mathbf{P}^2$, entonces $Z_2^2 - Z_0 Z_1 = 0$ luego $Z_0 \neq 0$ o $Z_1 \neq 0$ y $[Z_0 : Z_1] \in \mathbb{C}\mathbf{P}^1$. Si $[Z_0 : Z_1] \in \mathbb{C}\mathbf{P}^1 \setminus \{[0 : 1], [1 : 0]\}$, la fibra de f en $[Z_0 : Z_1]$ tiene exactamente dos puntos: $[Z_0 : Z_1 : Z_2]$ y $[Z_0 : Z_1 : -Z_2]$, donde $Z_2^2 = Z_0 Z_1 \neq 0$. Por lo tanto, f es una aplicación holomorfa de grado 2. Ya que

$$f^{-1}(\{[0 : 1]\}) = \{[0 : 1 : 0]\} \quad \text{y} \quad f^{-1}(\{[1 : 0]\}) = \{[1 : 0 : 0]\},$$

$[0 : 1 : 0]$ y $[1 : 0 : 0]$ ambos son puntos de ramificación de f, cada uno de índice 2.