Parcial, duración 1h30.

16 de abril 2012 — Florent Schaffhauser

Preguntas del curso

1. Sea A un anillo y sea $A^\times$ el conjunto de elementos invertibles de A. Mostrar que A es un anillo local si y sólo si $A \setminus A^\times$ es un ideal.

2. Sea K un cuerpo y sea $\nu : K \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una valuación en K. Recordar las propiedades de una valuación y mostrar que el conjunto

$$R_\nu := \{x \in K \mid \nu(x) \geq 0\}$$

es un anillo local cuyo único ideal máximo es

$$I_\nu := \{x \in K \mid \nu(x) > 0\}.$$

3. Mostrar que una 1-forma holomorfa no identicamente nula en una superficie de Riemann compacta y conexa de género 1 no se anula.

4. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación holomorfa entre superficies de Riemann compactas y conexas de género $g(X) = g(Y) \geq 2$. Mostrar que f es un isomorfismo.

Problema

1. Sea

$$\Sigma := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 - z = 0\}.$$

Mostrar que Σ admite una estructura de superficie de Riemann.

2. Se identifica $\mathbb{C}^2$ con

$$\{[Z_0 : Z_1 : Z_2] \in \mathbb{C}\mathbf{P}^2 \mid Z_0 \neq 0\},$$

de tal manera que $\mathbb{C}\mathbf{P}^2 = \mathbb{C}^2 \sqcup \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ con

$$\mathbb{C}\mathbf{P}^1 = \{[Z_0 : Z_1 : Z_2] \in \mathbb{C}\mathbf{P}^2 \mid Z_0 = 0\}.$$

Sea $\overline{\Sigma} \subset \mathbb{C}\mathbf{P}^2$ la clausura de Σ en $\mathbb{C}\mathbf{P}^2$. Dar una ecuación homogénea de $\overline{\Sigma}$ y mostrar que $\overline{\Sigma}$ admite una estructura de superficie de Riemann.

3. Determinar $\overline{\Sigma} \cap \mathbb{C}\mathbf{P}^1$.

4. Mostrar que $\overline{\Sigma}$ es conexa y calcular su género.

5. Se considera la aplicación

$$f : \begin{array}{ccc} \overline{\Sigma} & \longrightarrow & \mathbb{C}\mathbf{P}^1 \\ [Z_0 : Z_1 : Z_2] & \longmapsto & [Z_0 : Z_1] \end{array}$$

Mostrar que f tiene grado 2 y que tiene puntos de ramificación. Precisar el índice en cada punto de ramificación de f. *Indicación* : Estudiar las fibras de f.