Solución del examen final

3 de mayo 2012 — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1

Sea (g, k, a) el tipo topológico de (Σ, τ). Ya que $\Sigma/\tau \simeq \Sigma_{\hat{g},n} \# \mathcal{M}$ es no orientable y tiene $(n+1)$ componentes de borde, se tiene $a = 1$ y $k = n + 1$. Además, la característica de Euler de Σ/τ es

$$\begin{aligned}
\chi(\Sigma/\tau) &= \chi(\Sigma_{\hat{g},n} \# \mathcal{M}) \\
&= \chi(\Sigma_{\hat{g},n}) + \chi(\mathcal{M}) - 2 \\
&= (2 - 2\hat{g} - n) + 0 - 2 \\
&= -2\hat{g} - n
\end{aligned}$$

(acordarse que $\mathcal{M}$ es el cociente de un toro T por una involución, luego $\chi(\mathcal{M}) = \frac{1}{2}\chi(T) = 0$; también se tiene $\mathcal{M} = \mathbb{R}\mathbf{P}^2 \setminus D$).

Luego,

$$1 - g = \frac{1}{2}\chi(\Sigma) = \chi(\Sigma/\tau) = -2\hat{g} - n$$

por lo que

$$g = 2\hat{g} + n + 1$$

y el tipo topológico de (Σ, τ) es

$$(2\hat{g} + n + 1, n + 1, 1).$$

Ejercicio 2

1. Ya que $\{a; b; c\}$ es invariante bajo conjugación compleja, se tiene $a, b, c \in \mathbb{R}$ o (por ejemplo) $a \in \mathbb{R}$ y $c = \overline{b} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. En ambos casos,

$$(x - a)(x - b)(x - c)$$

es un polinomio de grado 3 en x con coeficientes en $\mathbb{R}$. Luego P también tiene coeficientes reales.

2. La curva $X_P(\mathbb{C})$ es suave si y sólo si el sistema

$$\begin{cases}
\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) &= 0 \\
\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= 0 \\
P(x, y) &= 0
\end{cases}$$

no tiene soluciones no triviales. Ya que $\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = 2y$ y

$$y - \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = (x - b)(x - c) + (x - a)(x - c) + (x - a)(x - b),$$

(x, y) es solución del sistema anterior si y sólo si $y = 0$ y

$$\begin{cases}
(x - b)(x - c) + (x - a)(x - c) + (x - a)(x - b) &= 0 \\
(x - a)(x - b)(x - c) &= 0
\end{cases}$$

Este nuevo sistema tiene una solución no trivial si y sólo si el polinomio $(x-a)(x-b)(x-c)$ tiene una raíz multiple en $\mathbb{C}$. Ya que $a \neq b \neq c \neq a$, eso no pasa y, por lo tanto, X_P es suave.

3.

a. Si $(x, y) \in X_P(\mathbb{R})$, entonces

$$(x - a)(x - b)(x - c) = y^2 \geq 0.$$

Si suponemos (por ejemplo) que $a < b < c$ (ya que $a, b, c \in \mathbb{R}$), lo anterior se cumple si y sólo si

$$a \leq x \leq b \qquad x \geq c$$

y

$$y = \pm\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

Luego $X_P(\mathbb{R})$ tiene dos componentes conexas en este caso (una que es compacta y una que no).

b. Si (por ejemplo) $a \in \mathbb{R}$ y $c = \overline{b} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, se tiene, para $(x, y) \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq y^2 = (x-a)(x-b)(x-\overline{b}) = (x-a)(x^2 - 2\mathrm{Re}(b)\, x + |b|^2)$$

con $x^2 - 2\mathrm{Re}(b)\, x + |b|^2 > 0$ en $\mathbb{R}$. Luego $X_P(\mathbb{R})$ tiene una sola componente conexa (y es compacta).

4. Ya que P tiene grado $d = 3$ y es irreducible, el género de $\overline{X_P}(\mathbb{C})$ es

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} = 1.$$

a. Si

$$P(x, y) = y^2 - (x^3 - 2x^2 - x + 2) = y^2 - (x-1)(x+1)(x-2),$$

entonces por lo anterior $X_P(\mathbb{R})$ tiene dos componentes conexas. Luego $\overline{X_P}(\mathbb{R})$ también, por lo que el tipo topológico de $\overline{X_P}$ es

$$(g, k, a) = (1, 2, a)$$

con $a = 0$ ó 1. Ya que $k = g + 1$, se tiene necesariamente $a = 0$ y el tipo topológico de $\overline{X_P}$ es

$$(g, k, a) = (1, 2, 0).$$

b. Si

$$P(x, y) = y^2 - (x^3 + x^2 + x + 1) = y^2 - (x-1)(x-i)(x+i),$$

se tiene por lo anterior que $X_P(\mathbb{R})$ tiene una sola componente conexa, luego $\overline{X_P}$ tiene tipo topológico

$$(g, k, a) = (1, 1, a)$$

con $a = 0$ ó 1. Si a fuese igual a 0, se tendría que $k \equiv (g+1) \mod 2$ es decir $1 \equiv 0 \mod 2$, lo cual no es cierto. Entonces $a = 1$ y $\overline{X_P}$ tiene tipo topológico

$$(g, k, a) = (1, 1, 1).$$

Ejercicio 3

1. La curva $\overline{X}$ asociada a X es la curva proyectiva plana de ecuación homogénea

$$x^4 + y^4 = z^4.$$

Es suave porque el sistema conformado por las tres derivadas parciales tiene $(0, 0, 0)$ como única slución en $\mathbb{C}^3$. Los puntos al infinito de X (ó $\overline{X}$) corresponden a las soluciones en $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ de la ecuación $x^4 + y^4 = 0$, es decir

$$\left(\frac{x}{y}\right)^4 = -1.$$

Luego X tiene cuatro direcciones asintóticas, dadas por las rectas

$$[0 : e^{i\frac{\pi}{4}} : 1], [0 : e^{i\frac{3\pi}{4}} : 1], [0 : e^{i\frac{5\pi}{4}} : 1], [0 : e^{i\frac{7\pi}{4}} : 1]$$

de $\mathbb{C}^2$.

2. X está definida por una ecuación homogénea irreducible de grado $d = 4$, luego $\overline{X}$ tiene género

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} = 3.$$

Sea $X := x^2$ y $Y := y^2$. Si $(x, y) \in X(\mathbb{R})$, entonces (X, Y) es un punto del círculo unidad de $\mathbb{R}^2$, con coordenadas ambas positivas. Luego

$$
\begin{aligned}
X(\mathbb{R}) &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \exists\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right], x^2=\cos\theta, y^2=\operatorname{sen}\theta\right\} \\
&= \left\{(\sqrt{\cos\theta},\sqrt{\operatorname{sen}\theta}):\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right\}\cup\left\{(\sqrt{\cos\theta},-\sqrt{\operatorname{sen}\theta}):\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right\} \\
&\quad \cup\left\{(-\sqrt{\cos\theta},\sqrt{\operatorname{sen}\theta}):\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right\}\cup\left\{(-\sqrt{\cos\theta},-\sqrt{\operatorname{sen}\theta}):\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

Estos cuatro conjuntos son conexos y tienen puntos de intersección cada uno con otros dos (en uno de los puntos $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ y $(0,-1)$). Luego $X(\mathbb{R})$ es conexo (y, de hecho, es una curva cerrada en $\mathbb{R}^2$). Por lo tanto, $\overline{X}$ tiene tipo topológico

$$(g,k,a)=(3,1,a)$$

con $k\not\equiv(g+1) \mod 2$, luego $a=0$ y

$$(g,k,a)=(3,1,0).$$

3. La característica de Euler de $\overline{X}/\tau$ es

$$\chi(\overline{X}/\tau)=\frac{1}{2}\chi(\overline{X})=1-g=-2.$$

Además $\overline{X}/\tau$ es no orientable (pues $a=0$) y tiene una sola componente de borde (pues $k=1$). Luego $\overline{X}/\tau$ es la suma conexa, menos un disco, de h planos proyectivos donde h cumple con

$$2-h-1=\chi(\overline{X}/\tau)=-2$$

es decir $h=3$ y

$$\overline{X}/\tau=(\mathbb{R}\mathbf{P}^2\#\mathbb{R}\mathbf{P}^2\#\mathbb{R}\mathbf{P}^2)\setminus D.$$

Ejercicio 4

1. Si f es el automorfismo de $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ inducido por $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$, entonces $\tau\circ f\circ\tau$ es inducido por $\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d}\end{pmatrix}$. Luego, si $f=\tau\circ f\circ\tau$ en $\mathbf{PGL}(2,\mathbb{C})=\mathbf{GL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{C}^*$, entonces existe $\lambda\in\mathbb{C}^*$ tal que, para cualquier $(z_0,z_1)\in\mathbb{C}^2\setminus\{(0,0)\}$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} az_0+bz_1 &=& \lambda(\overline{a}z_0+\overline{b}z_1) \\ cz_0+dz_1 &=& \lambda(\overline{c}z_0+\overline{d}z_1).\end{array}\right.$$

Para $(z_0,z_1)=(1,0)$, esto da $a=\lambda\overline{a}$ y $c=\lambda\overline{c}$, y para $(z_0,z_1)=(0,1)$, da $b=\lambda\overline{b}$ y $d=\lambda\overline{d}$. Ya que (por ejemplo) $a\neq 0$, se tiene $\overline{\lambda}a=\overline{a}=\frac{a}{\lambda}$ luego $|\lambda|^2=1$, es decir $\lambda=e^{i2\theta}$ para algún $\theta\in\mathbb{R}$. Entonces $e^{i\theta}a\in\mathbb{R}$ e igualmente para $e^{i\theta}b$, $e^{i\theta}c$ y $e^{i\theta}d$. Luego $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbf{GL}(2;\mathbb{C})$ actúa en $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ de la misma manera que $e^{i\theta}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbf{GL}(2;\mathbb{R})$, es decir $f\in\mathbf{PGL}(2;\mathbb{R})$. La contenencia inversa es obvia y por lo tanto

$$\operatorname{Aut}(\mathbb{C}\mathbf{P}^1,\tau)\simeq\mathbf{PGL}(2;\mathbb{R}).$$

2. Si el automorfismo f de $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ inducido por $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ conmuta con τ', entonces, por el mismo procedimiento que anteriormente, existe $\lambda\in\mathbb{C}^*$ tal que, para cualquier $(z_0,z_1)\in\mathbb{C}^2\setminus\{(0,0)\}$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} az_0+bz_1 &=& \lambda(-\overline{d}z_0+\overline{c}z_1) \\ cz_0+dz_1 &=& \lambda(\overline{b}z_0-\overline{a}z_1).\end{array}\right.$$

lo cual implica $a=-\lambda\overline{d}$, $b=\lambda\overline{c}$, $c=\lambda\overline{b}$ y $d=-\lambda\overline{a}$. En particular, $|\lambda|^2=1$. Escribamos $\lambda=e^{i2\theta}$ y $\alpha:=e^{-i\theta}a$, $\beta:=e^{-i\theta}b$, $\gamma:=e^{-i\theta}c$, $\delta:=e^{-i\theta}d$. Entonces $\delta=-\overline{\alpha}$ y $\gamma=\overline{\beta}$. Luego $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ actúa en $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ de la misma manera que

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & -\overline{\alpha}\end{pmatrix},$$

cuyas filas son ortogonales para el producto hermitiano canónico de $\mathbb{C}^2$. Luego $f \in \mathbf{PU}(2) = \mathbf{PSU}(2)$. La otra contenencia es fácil de verificar y así se obtiene que

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}\mathbf{P}^1, \tau') \simeq \mathbf{PSU}(2).$$