UNIVERSIDAD DE LOS ANDES — GEOMETRIA ALGEBRAICA REAL

Examen final, duración 1h30.

3 DE MAYO 2012 — FLORENT SCHAFFHAUSER

EJERCICIO 1

Sea (Σ, τ) una curva real compacta conexa tal que Σ/τ sea homeomorfa a la suma conexa

$$\Sigma_{\hat{g},n} \# \mathcal{M}$$

de una superficie orientable con n componentes de borde $\Sigma_{\hat{g},n}$ y de una cinta de Möbius $\mathcal{M}$.

Determinar el tipo topológico de (Σ, τ).

EJERCICIO 2

Sean a, b, c tres números complejos *distintos* tales que el conjunto $\{a; b; c\}$ sea invariante bajo conjugación compleja.

Se considera la curva afín plana de ecuación

$$y^2 = (x-a)(x-b)(x-c).$$

Se usará la notación

$$\begin{aligned} P(x,y) &= y^2 - (x-a)(x-b)(x-c), \\ X_P(\mathbb{C}) &= \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid P(x,y) = 0\}. \end{aligned}$$

1. Mostrar que P es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$.

2. Mostrar que la curva $X_P(\mathbb{C})$ es suave.

3. Se denota

$$X_P(\mathbb{R}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x,y) = 0\}.$$

a. Mostrar que si $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces $X_P(\mathbb{R})$ tiene dos componentes conexas.

b. Mostrar que si a, b ó c no es real, entonces $X_P(\mathbb{R})$ tiene una sola componente conexa.

4. Se denota $\overline{X_P}$ la curva proyectiva real asociada a X_P (no se pide verificar que $\overline{X_P}$ es suave). Determinar el tipo topológico de $\overline{X_P}$ cuando P es el polinomio:

a. $y^2 - (x^3 - 2x^2 - x + 2)$.

b. $y^2 - (x^3 + x^2 + x + 1)$.

EJERCICIO 3
(Una curva de Fermat)

Se considera la curva afín plana $X \subset \mathbb{C}^2$ de ecuación

$$x^4 + y^4 = 1.$$

1. Mostrar que la curva proyectiva $\overline{X} \subset \mathbb{C}\mathbf{P}^2$ asociada a X es suave y determinar sus puntos al infinito.

2. Identificar el tipo topólogico de la curva real $(\overline{X}, \tau)$, donde τ es la estructura real canónica de $\mathbb{C}\mathbf{P}^2$.

3. Calcular la característica de Euler de $\overline{X}/\tau$ e identificar topológicamente la superficie $\overline{X}/\tau$.

Ejercicio 4
(Bono)

Sea (Σ, τ) una curva real. Se recuerda que el grupo de automorfismos de (Σ, τ) es el grupo

$$\mathrm{Aut}(\Sigma, \tau) = \{f \in \mathrm{Aut}(\Sigma) \mid f \circ \tau = \tau \circ f\} = \{f \in \mathrm{Aut}(\Sigma) \mid f = \tau \circ f \circ \tau\},$$

donde $\mathrm{Aut}(\Sigma)$ es el grupo de biyecciones biholomorfas de Σ.

Se supone a continuación que

$$\Sigma = \mathbb{C}\mathbf{P}^1 = \{[z_0 : z_1] : (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}\}$$

y se recuerda que

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}\mathbf{P}^1) \simeq \mathbf{PGL}(2, \mathbb{C}) = \mathbf{GL}(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^*,$$

donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$ actúa en $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot [z_0 : z_1] = [az_0 + bz_1 : cz_0 + dz_1].$$

1. Sea $\tau : [z_0 : z_1] \longmapsto [\overline{z_0} : \overline{z_1}]$ en $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$. Mostrar que

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}\mathbf{P}^1, \tau) \simeq \mathbf{PGL}(2; \mathbb{R}) = \mathbf{GL}(2; \mathbb{R})/\mathbb{R}^*.$$

2. Sea $\tau' : [z_0 : z_1] \longmapsto [-\overline{z_1} : \overline{z_0}]$ en $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$. Mostrar que

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}\mathbf{P}^1, \tau') \simeq \mathbf{PSU}(2) = \mathbf{SU}(2)/\{\pm \mathrm{Id}\}.$$

Se recuerda que $\mathbf{PSU}(2)$ también es igual a $\mathbf{PU}(2) = \mathbf{U}(2)/\mathbf{S}^1$.