UNIVERSIDAD DE LOS ANDES — CURSO TUTORIAL

Fibrados holomorfos en curvas algebraicas

2011-II — FLORENT SCHAFFHAUSER

- Créditos : 4.
- Fechas : del 22 de agosto al 14 de noviembre (12 semanas).
- Horario : lunes de 2 a 4.
- Evaluación : una exposición oral, con producción de notas escritas.
- Observación : la entrada y la participación son libres.

1. Objectivo

El objetivo del curso es dar una introducción al estudio de fibrados vectoriales holomorfos en una superficie de Riemann M, enfatizando el punto de vista de la geometría diferencial. La correspondencia básica que se estudiará es la que existe entre (clases de isomorfismo de) estructuras holomorfas sobre un fibrado hermítico fijo E en M y (órbitas, bajo endomorfismos $\mathbb{C}$-lineales del fibrado, de) conexiones unitarias sobre E.

Este lenguaje permite formular el teorema de Donaldson que caracteriza las estructuras holomorfas estables sobre E en términos de los mínimos absolutos de la funcional de Yang-Mills, definida en el espacio de todas las conexiones unitarias. Eso da, en particular, una construcción del espacio de módulos de estructuras semi-estables como cociente simpléctico.

Presentaremos todas las herramientas para entender la formulación del teorema de Donaldson y analizaremos la correspondencia de Narasimhan-Seshadri entre fibrados holomorfos semi-estables en M y representaciones unitarias del grupo fundamental de M en un punto x cualquiera.

2. Contenido

1. Fibrados vectoriales holomorfos en una superficie de Riemann.
   a) Fibrados vectoriales.
   b) Clasificación topológica.
   c) Operadores de Dolbeault y el espacio de estructuras holomorfas.
2. Estructuras holomorfas y conexiones unitarias.
   a) Métricas hermíticas y conexiones unitarias (en un fibrado suave).
   b) El grupo de automorfismos unitarios y $\mathbb{C}$-lineales.
   c) La forma simpléctica de Atiyah-Bott y la funcional de Yang-Mills..
3. Fibrados vectoriales estables y semi-estables.
   a) Estabilidad con respecto a la pendiente.
   b) Variedades de módulos.
   c) La filtración de Harder-Narasimhan.
4. La variedad de módulos como cociente simpléctico.
   a) Reducción simpléctica.
   b) El teorema de Donaldson.
   c) La correspondencia de Narasimhan-Seshadri.

Referencias

[AB83] M. F. Atiyah and R. Bott. The Yang-Mills equations over Riemann surfaces. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 308(1505):523–615, 1983.

[DK90] S. K. Donaldson and P. B. Kronheimer. *The geometry of four-manifolds*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1990. Oxford Science Publications.

[Don83] S. K. Donaldson. A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri. *J. Differential Geom.*, 18(2):269–277, 1983.

[GH94] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Kob87] Shoshichi Kobayashi. *Differential geometry of complex vector bundles*, volume 15 of *Publications of the Mathematical Society of Japan*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1987. Kanô Memorial Lectures, 5.

[LPV85] J. Le Potier and J.L. Verdier. Variété de modules de fibrés stables sur une surface de Riemann: résultats d'Atiyah et Bott. In *Moduli of stable bundles over algebraic curves (Paris, 1983)*, volume 54 of *Progr. Math.*, pages 5–28. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1985.

[NS65] M. S. Narasimhan and C. S. Seshadri. Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface. *Ann. of Math. (2)*, 82:540–567, 1965.

[Tha97] Michael Thaddeus. An introduction to the topology of the moduli space of stable bundles on a Riemann surface. Andersen, Jørgen Ellegaard (ed.) et al., Geometry and physics. Proceedings of the conference at Aarhus University, Aarhus, Denmark, 1995. New York, NY: Marcel Dekker. Lect. Notes Pure Appl. Math. 184, 71-99 (1997)., 1997.

[Wel08] Raymond O. Wells. *Differential analysis on complex manifolds. With a new appendix by Oscar Garcia-Prada. 3rd ed.* Graduate Texts in Mathematics 65. New York, NY: Springer., 2008.