Universidad de Los Andes — Cálculo 3

Solución Parcial 4

2011-II — Florent Schaffhauser

Ejercicio I

1. El lagrangiano del problema es

$$\begin{array}{rcl} L(x,y,z,\lambda,\mu) & = & f(x,y,z) - \lambda(g(x,y,z) - 30) - \mu(h(x,y,z) - 10) \\ & = & x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + 2y + z - 30) - \mu(2x - y - 3z - 10). \end{array}$$

Se puede observar que el teorema de Lagrange vale para este problema, pues

$$g'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad h'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes. Las condiciones de Lagrange son

$$L'(x,y,z,\lambda,\mu) = 0,$$

es decir,

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} 2x & & & -\lambda & -2\mu & = & 0 \\ & 2y & & -2\lambda & +\mu & = & 0 \\ & & 2z & -\lambda & +3\mu & = & 0 \\ x & +2y & +z & & & = & 30 \\ 2x & -y & -3z & & & = & 10 \end{array}\right.$$

2. El sistema anterior es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & & & -\lambda & -2\mu & = & 0 & \\ & 2y & & -2\lambda & +\mu & = & 0 & \\ & & 2z & -\lambda & +3\mu & = & 0 & \\ & 2y & +z & +2\lambda & -4\mu & = & 60 & (2L_4 - L_1) \\ & -y & -3z & +\lambda & +2\mu & = & 10 & (L_5 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} 2x & & -\lambda & -2\mu & = & 0 & \\ & 2y & -2\lambda & +\mu & = & 0 & \\ & 2z & -\lambda & +3\mu & = & 0 & \\ & z & +4\lambda & +3\mu & = & 60 & (L_4 - L_2) \\ & -6z & & +5\mu & = & 20 & (2L_5 + L_2) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} 2x & & & -\lambda & -2\mu & = & 0 & \\ & 2y & & -2\lambda & +\mu & = & 0 & \\ & & 2z & -\lambda & +3\mu & = & 0 & \\ & & & 9\lambda & +3\mu & = & 120 & (2L_4 - L_3) \\ & & & -3\lambda & +14\mu & = & 20 & (L_5 + 3L_2) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} 2x & & & -\lambda & -2\mu & = & 0 & \\ & 2y & & -2\lambda & +\mu & = & 0 & \\ & & 2z & -\lambda & +3\mu & = & 0 & \\ & & & 9\lambda & +3\mu & = & 120 & \\ & & & & 45\mu & = & 180 & (3L_5 + L_4) \end{array}\right.$$

Luego la única solución del sistema es

$$x^* = 10,\ y^* = 10,\ z^* = 0,\ \lambda^* = 12,\ \mu^* = 4.$$

3. El lagrangiano del problema es convexo (como suma de funciiones convexas) y el sistema de Lagrange tiene $(10,10,0,12,4)$ como (única) solución, luego f, bajo las restricciones propuestas, tiene un mínimo global en $(10,10,0)$ (y este mínimo vale $f(10,10,0) = 200$).

Ejercicio II

1. El lagrangiano del problema es
$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda(g(x,y)-1) = x + y - \lambda(x^2+y^2-1).$$
Las condiciones de Kuhn-Tucker para este problema son
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) & = & 0 \\ x^2+y^2-1 & \leq & 0 \\ \lambda \geq 0 \text{ y } (x^2+y^2-1<0) & \Longrightarrow & \lambda = 0\ , \end{cases}$$
es decir,
$$\begin{cases} 1-2\lambda x & = & 0 \\ 1-2\lambda y & = & 0 \\ x^2+y^2-1 & \leq & 0 \\ \lambda \geq 0 \text{ y } (x^2+y^2-1<0) & \Longrightarrow & \lambda = 0. \end{cases}$$
2. Si $\lambda = 0$ en el sistema anterior, la primera condición da $1 = 0$, lo cual es imposible. Luego $\lambda \neq 0$ y, por la cuarta condición, $x^2+y^2 = 1$. El sistema así simplificado es
$$\begin{cases} 2\lambda x & = & 1 \\ 2\lambda y & = & 1 \\ x^2+y^2 & = & 1 \\ \lambda & > & 0. \end{cases}$$
Luego $x = \frac{1}{2\lambda}$, $y = \frac{1}{2\lambda}$ y $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1$. Ya que $\lambda > 0$, eso implica
$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}},\ x = \frac{\sqrt{2}}{2},\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
3. El lagrangiano del problema es convexo y el sistema de Kuhn-Tucker tiene solución, luego f tiene un máximo global en el punto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ bajo la restricción $x^2+y^2 \leq 1$ (y ése vale $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$).

Ejercicio III

1. El lagrangiano del problema es
$$\begin{aligned} L(K,L,\lambda) &= P(K,L) - \lambda(R(K,L) - m) \\ &= 120KL - \lambda(2K+5L-m). \end{aligned}$$
Se puede observar que el teorema de Lagrange vale para este problema, pues
$$R'(K,L) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} \neq 0.$$
Las condiciones de Lagrange son $L'(K,L,\lambda) = 0$, es decir,
$$\begin{cases} 120L - 2\lambda & = & 0 \\ 120K - 5\lambda & = & 0 \\ 2K + 5L & = & m. \end{cases}$$
2. Se deduce del sistema anterior que $5L = \frac{\lambda}{12}$ y $2K = \frac{\lambda}{12}$. Luego la única solución del sistema es
$$\lambda^* = 6m,\ K^* = \frac{m}{4},\ L^* = \frac{m}{10}.$$
3. Aceptando que el punto (K^*, L^*) hallado anteriormente es solución del problema considerado, la producción máxima $P^*(m)$ en función del presupuesto m es
$$P^*(m) = P(K^*, L^*) = P(\frac{m}{4}, \frac{m}{10}) = 3m^2.$$
4. Si el presupuesto aumenta de una unidad, el cambio en la producción máxima es aproximadamente
$$(P^*)'(m) = 6m\ (= \lambda^*),$$
donde la última igualdad también sigue del teorema de la envolvente.