Parcial 3, duración 1h30

20 DE OCTUBRE 2011 FLORENT SCHAFFHAUSER

No se autorizan libros ni notas personales. Se recomienda usar un borrador. No se autorizan calculadoras. Celulares apagados. Cada pregunta vale un punto.

Ejercicio I

Se considera la función

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xe^{-x}(y^2-4y) \end{array}$$

1. Determinar los puntos críticos de f en $\mathbb{R}^2$.
2. Decir si los puntos críticos de f en $\mathbb{R}^2$ son máximos locales, mínimos locales o puntos de silla.

Ejercicio II

Se considera la función

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2+2y^2+3z^2+x+2xy+2xz+4 \end{array}$$

1. Mostrar que f es convexa en $\mathbb{R}^3$.
   Bono: Dar una reducción de Gauss de la forma cuadrática $f''(x,y,z)$.
2. Mostrar que f tiene un mínimo global en $\mathbb{R}^3$ y especificar en qué punto.

Ejercicio III

Se propone estudiar la función

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x^2+3y^2-4x-40 \end{array}$$

en la región

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 16\}.$$

1. Justificar que f tiene un máximo global y un mínimo global en D.
2. Se escribe $D = A \cup B$ donde

   $$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 16\}$$

   y

   $$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 16\}.$$

   a) Mostrar que f tiene un mínimo local en A.
   b) Mostrar que $f|_B$ tiene un máximo global y un mínimo global.
   c) Mostrar que $f|_B$ tiene su máximo global en $(-2, 2\sqrt{3})$ y en $(-2, -2\sqrt{3})$.
   d) Mostrar que $f|_B$ tiene su mínimo global en $(4,0)$.
   e) Hallar el máximo global y el mínimo global de f en D.