Solución Parcial 3

2011-II — Florent Schaffhauser

Ejercicio I

1. La función f es de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$. Los puntos críticos de f en $\mathbb{R}^2$ son las soluciones del sistema
$$f'(x,y) = 0$$
es decir
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 \end{cases}$$
En este caso, el sistema es
$$\begin{cases} e^{-x}(1-x)(y^2-4y) &= 0 \\ xe^{-x}(2y-4) &= 0 \end{cases}$$
y tiene soluciones
$$(1,2), (0,4) \quad \text{y} \quad (0,0).$$

2. La segunda derivada de f en el punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ es
$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} e^{-x}(x-2)(y^2-4y) & e^{-x}(1-x)(2y-4) \\ e^{-x}(1-x)(2y-4) & 2xe^{-x} \end{pmatrix}.$$
En el punto crítico $(1,2)$, se tiene
$$f''(1,2) = \begin{pmatrix} \frac{4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix}.$$
En las notaciones de Monge, se tiene $rt - s^2 = \frac{8}{e^2} - 0 > 0$ y $r + t = \frac{6}{e} > 0$, luego la forma cuadrática $f''(1,2)$ es definida positiva y $(1,2)$ es un mínimo local de f. En el punto crítico $(0,4)$, se tiene
$$f''(0,4) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$
luego $rt - s^2 = 0 - 16 < 0$, lo cual demuestra que la forma cuadrática $f''(0,4)$ cambia de signo en cualquier vecindad de 0. Por consiguiente, $(0,4)$ es un punto de silla de f. De la misma manera,
$$f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$
y $(0,0)$ es un punto de silla de f.

Ejercicio II

1. f es de clase C^2 en $\mathbb{R}^3$. Se tiene
$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+1+2y+2z & 4y+2x & 6z+2x \end{pmatrix}$$
y
$$f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$
Demos una reducción de Gauss de la forma cuadrática $f''(x,y,z)$:
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} f''(x,y,z) \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} &= 2h^2 + 4k^2 + 6l^2 + 4hk + 4hl \\ &= 2(h+k+l)^2 - 2k^2 - 2l^2 - 4kl + 4k^2 + 6l^2 \\ &= 2(h+k+l)^2 + 2k^2 - 4kl + 4l^2 \\ &= 2(h+k+l)^2 + 2(k-l)^2 + 2l^2. \end{aligned}$$

Luego, para cualquier $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f''(x,y,z)$ es definida positiva, lo cual demuestra que f es convexa en $\mathbb{R}^3$.

2. Ya que f es convexa y diferenciable en el abierto $\mathbb{R}^3$, f tiene un máximo global en $\mathbb{R}^3$ si y sólo si tiene un punto crítico en $\mathbb{R}^3$. Los puntos críticos de f son las soluciones del sistema
$$f'(x,y,z) = 0,$$
es decir
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & + & 2z & = & -1 \\ 2x & + & 4y & & & = & 0 \\ 2x & + & & & 6z & = & 0 \end{array}\right.$$
lo cual es equivalente a
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & + & 2z & = & -1 \\ & & 2y & - & 2z & = & 1 \\ & & & & 2z & = & 2 \end{array}\right.$$
es decir
$$z = 1, y = \frac{3}{2}, x = -3.$$
Por lo tanto f tiene un máximo global en $(-3, \frac{3}{2}, 1)$ (y ése vale $f(-3, \frac{3}{2}, 1) = \frac{5}{2}$).

Ejercicio III

1. D es compacto (cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$) y f es continua en D. Por lo tanto f tiene un máximo global y un mínimo global en D.
2. *a*) A es abierto y f es de clase C^2 en A. Los puntos críticos de f en A son las soluciones del sistema
$$f'(x,y) = 0$$
es decir
$$\left\{\begin{array}{rcl} 4x - 4 & = & 0 \\ 6y & = & 0 \end{array}\right.$$
Luego $(1,0)$ es el único punto crítico de f en A. La segunda derivada de f en el punto (x,y) es
$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$
Luego, en las notaciones de Monge, $rt - s^2 = 6 \times 4 - 0 = 24 > 0$ y $r + t = 4 + 6 = 10 > 0$, lo cual demuestra que $f''(1,0)$ es definida positiva (de hecho, f es estrictamente convexa en A). Por lo tanto, $f|_A$ tiene un mínimo local (de hecho, global) en $(1,0)$ y este mínimo vale $f(1,0) = -42$.

   b) B es compacto y f es continua en B. Por lo tanto, la función f tiene un máximo global y un mínimo global en B.

   c) Si $(x,y) \in B$, se tiene $y^2 = 16 - x^2$ y $x \in [-4;4]$. Luego, si $(x,y) \in B$,
$$f(x,y) = 2x^2 + 3(16 - x^2) - 4x - 40 = -x^2 - 4x + 8.$$
A continuación se estudia la función
$$g : \begin{array}{ccc} [-4;4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x^2 - 4x + 8. \end{array}$$
El único punto crítico de g en $]-4;4[$ es el punto $x = -2$ y g tiene un máximo global en $x = -2$, que vale $g(-2) = 12$. Luego $f|_B$ tiene un máximo global en $(x,y) = (-2, \sqrt{12}) = (-2, 2\sqrt{3})$ y en $(x,y) = (-2, -2\sqrt{3})$ y ése vale
$$f(-2, \pm 2\sqrt{3}) = 12.$$

   d) Ya que $g(-4) = 8$ y $g(4) = -24$, g tiene su mínimo global en $x = 4$. Luego, $f|_B$ tiene su mínimo global en $(x,y) = (4,0)$ y ése vale
$$f(4,0) = -24.$$

   e) Al comparar los mínimos y máximos de f en A y en B hallados anteriormente, se deduce que $f|_D$ tiene su máximo global en los puntos $(-2, \pm 2\sqrt{3})$ (y ése vale 12) y que $f|_D$ tiene su mínimo global en $(1,0)$ (y ése vale -42).