Parcial 2, duración 1h30

22 de septiembre 2011 — Florent Schaffhauser

No se autorizan libros ni notas personales. Se recomienda usar un borrador. No se autorizan calculadoras. Cada pregunta vale 1 punto. Celulares apagados.

Ejercicio I

Se considera, para $K > 0$ y $L > 0$, la siguiente función de producción

$$P : (K, L) \mapsto K^{\frac{1}{3}} L^{\frac{2}{3}}$$

y se interpreta K como el capital y L como el trabajo.

1. Sea (K_0, L_0) un punto de $\mathbb{R}^2$ con $K_0 > 0$ y $L_0 > 0$. Sea $c = P(K_0, L_0)$. Dar la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel c de P en el punto (K_0, L_0).
2. Mostrar que la tasa marginal de sustitución del capital al trabajo en el punto (K_0, L_0) es
$$TMS(K_0, L_0) = -\frac{1}{2}\frac{L_0}{K_0}\cdot$$
Interpretar el resultado.

Ejercicio II

1. Sea $R > 0$ y sea D_R la región
$$D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$
Mostrar que
$$\iint_{D_R} \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy = \frac{2\pi R^3}{3}\cdot$$
Indicación: se podrá dibujar D_R y usar coordenadas polares.
2. Se considera la región S del plano contenida entre la parábola de ecuación $y = x^2$, la recta de ecuación $y = 0$ y las rectas de ecuaciones $x = -1$ y $x = 1$. Evaluar la siguiente integral
$$\iint_S \sqrt{1 + x^3}\, dxdy\cdot$$
Indicación: se podrá dibujar S y aplicar el teorema de Fubini.

Ejercicio III

Se consideran dos funciones $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$. Se supone que son soluciones del siguiente sistema :

$$\left\{\begin{array}{ccc} u + xe^y + v & = & e - 1 \\ x + e^{u+v^2} - y & = & \frac{1}{e} \\ u(1,1) & = & -1 \\ v(1,1) & = & 0 \end{array}\right.$$

donde e es la base del logaritmo neperiano ($\log e = 1$).

1. Mostrar que

$$d(e^{u+v^2}) = e^{u+v^2}\, du + 2v\, e^{u+v^2}\, dv\,.$$

2. Tomar diferenciales en el sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u + xe^y + v & = & e - 1 \\ x + e^{u+v^2} - y & = & \frac{1}{e} \end{array} \right.$$

y hallar funciones A, B, C, D de (x, y, u, v) tales que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} du + dv & = & Adx + Bdy \\ du + 2v\, dv & = & Cdx + Ddy \ . \end{array} \right.$$

3. Deducir de lo anterior que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2v - 1} \left(-2ve^y + \frac{1}{e^{u+v^2}} \right)$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2v - 1} \left(-2xve^y - \frac{1}{e^{u+v^2}} \right) .$$

4. Calcular

$$\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial y}$$

en términos de (x, y, u, v).

5. Mostrar que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) = -e, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(1, 1) = e$$

y

$$\frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(1, 1) = -2e \cdot$$

6. Dar una aproximación lineal de u y v en $(1, 1)$. Deducir de ella un valor aproximado de

$$u(1 + \frac{1}{10}, 1 + \frac{1}{10}) \quad \text{y de} \quad v(1 + \frac{1}{10}, 1 + \frac{1}{10}) \cdot$$