Solución Parcial 2

2011-II — Florent Schaffhauser

Ejercicio I

1. La ecuación de la recta tangente a la curva de nivel c de P en el punto (K_0, L_0) es
$$\frac{\partial P}{\partial K}(K_0, L_0)(K - K_0) + \frac{\partial P}{\partial L}(K_0, L_0)(L - L_0) = 0\,,$$
es decir,
$$\frac{1}{3}\left(\frac{L_0}{K_0}\right)^{2/3}(K - K_0) + \frac{2}{3}\left(\frac{K_0}{L_0}\right)^{1/3}(L - L_0) = 0\,.$$

2. La tasa marginal de sustitución del capital al trabajo en un punto es la pendiente de la recta tangente a la curva de nivel de P que pasa por ese punto. Utilizando lo calculado anteriormente, se tiene que
$$TMS(K_0, L_0) = -\frac{\frac{\partial P}{\partial K}(K_0, L_0)}{\frac{\partial P}{\partial L}(K_0, L_0)} = -\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{L_0}{K_0}\right)^{1/3}}{\frac{2}{3}\left(\frac{K_0}{L_0}\right)^{2/3}} = -\frac{1}{2}\frac{L_0}{K_0}\cdot$$
Esto se puede interpretar diciendo que si se agrega una unidad de capital a una combinación (K_0, L_0) de factores de producción, se puede *quitar* $\frac{1}{2}K\frac{L_0}{K_0}$ unidades de trabajo *y mantener el mismo nivel de producción.*

Ejercicio II

1. La región D_R es el círculo de centro $(0,0)$ y de radio R en $\mathbb{R}^2$. En coordenadas polares,
$$D_R = \{(r\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \mid 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$
Luego
$$\begin{aligned}\iint_{D_R} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \sqrt{r^2\underbrace{(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}_{=1}}\ r\,dr\right)d\theta \\ &= 2\pi\int_0^R r^2\,dr \\ &= \frac{2\pi R^3}{3}\cdot\end{aligned}$$

2. Apliquemos el teorema de Fubini en la región
$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\}.$$
Se obtiene
$$\begin{aligned}\iint_S \sqrt{1+x^3}\,dxdy &= \int_{-1}^{1}\left(\int_0^{x^2}\sqrt{1+x^3}\,dy\right)dx \\ &= \int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1+x^3}\,dx\,.\end{aligned}$$
Haciendo el cambio de variables $u(x) = 1 + x^3$ (de tal manera que $du = 3x^2\,dx$, $u(-1) = 0$ y $u(1) = 2$), se obtiene
$$\iint_S \sqrt{1+x^3}\ dxdy = \frac{1}{3}\int_0^2 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}[\frac{2}{3}u^{3/2}]_0^2 = \frac{4\sqrt{2}}{9}\cdot$$

Ejercicio III

1. Se tiene

$$d(e^{u+v^2}) = \big(d(u+v^2)\big)e^{u+v^2}\big) = e^{u+v^2}\big(du + d(v^2)\big) = e^{u+v^2}\,du + 2v\,e^{u+v^2}\,dv\,.$$

2. Al tomar diferenciales en el sistema propuesto, se obtiene

$$\begin{cases} du + (dx)e^y + x\,d(e^y) + dv & = & 0 \\ dx + d(e^{u+v^2}) - dy & = & 0 \end{cases}$$

Luego, por lo anterior,

$$\begin{cases} du + dv & = & -e^y dx - xe^y dy \\ du + 2vdv & = & \frac{-1}{e^{u+v^2}}dx + \frac{1}{e^{u+v^2}}dy\,. \end{cases}$$

3. Calculemos $2vL_1 - L_2$ en el sistema anterior. Se obtiene

$$(2v-1)\,du = \left(-2ve^y + \frac{1}{e^{u+v^2}}\right)dx + \left(-2xve^y - \frac{1}{e^{u+v^2}}\right)dy\,.$$

Luego

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2v-1}\left(-2ve^y + \frac{1}{e^{u+v^2}}\right)$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2v-1}\left(-2xve^y - \frac{1}{e^{u+v^2}}\right)\,.$$

4. Por la pregunta 2, se tiene que

$$dv = -du - e^y\,dx - xe^y\,dy\,.$$

Luego

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x} - e^y = \frac{1}{2v-1}\left(e^y - \frac{1}{e^{u+v^2}}\right)$$

y

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y} - xe^y = \frac{1}{2v-1}\left(xe^y + \frac{1}{e^{u+v^2}}\right)\,.$$

5. Ya que $u(1,1) = -1$ y $v(1,1) = 0$, se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = (-1)\left(0 + \frac{1}{e^{-1}}\right) \;=\; -e \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(1,1) = (-1)\left(0 - \frac{1}{e^{-1}}\right) \;=\; e\,,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(1,1) = -\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) - e \;=\; 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial y}(1,1) = -\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) - e \;=\; -2e\,.$$

6. La aproximación lineal de u en $(1,1)$ es

$$\begin{aligned} u(x,y) &\approx u(1,1) + \frac{\partial u}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial u}{\partial y}(1,1)(y-1) \\ &= -1 - e(x-1) + e(y-1) \\ &= -ex + ey - 1\,. \end{aligned}$$

De manera similar, la aproximación lineal de v en $(1,1)$ es

$$v(x,y) \approx 0 + 0(x-1) - 2e(y-1) = -2ey + 2e\,.$$

Obtenemos los valores aproximados

$$u(1+\frac{1}{10}, 1+\frac{1}{10}) \;\approx -1 - \frac{e}{10} + \frac{e}{10} = -1$$

y

$$v(1+\frac{1}{10}, 1+\frac{1}{10}) \approx 0 + 0 - \frac{2e}{10} = -\frac{e}{5}\,.$$