Universidad de Los Andes — Cálculo 3

Parcial 1, duración 1h

18 de agosto 2011 — Florent Schaffhauser

No se autorizan libros ni notas personales. Se recomienda usar un borrador. No se autorizan calculadoras. Cada pregunta vale 1 punto y el bono 0.5 punto.

Ejercicio I

Sea f la función

$$(x,y) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2+y^2-1}} \times \ln(4-(x-2)^2-y^2)$$

1. Determinar el dominio de definición de f y dibujarlo.
2. Determinar el límite de f en un punto del círculo de ecuación $(x-2)^2+y^2=4$.
3. Determinar el límite de f en un punto del círculo de ecuación $(x-2)^2+y^2=1$.

Ejercicio II

Se considera la función $f:(x,y)\longmapsto x\sqrt{y}$ $\mathbf{para\ x, y > 0}$.

1. Dibujar, en una misma gráfica, las curvas de nivel 1 y 4 de la función f.
   Bono : ¿Pueden dos curvas de nivel distintas tener una intersección no vacía?
2. Dar una ecuación de la recta tangente a la curva de nivel 1 en el punto $(1,1)$. Dibujar esta recta en la gráfica anterior.
3. Dar una ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(2,1,2)$.

Ejercicio III

Sea f la función

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^5-y^5}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

1. Mostrar, justificando plenamente su respuesta, que f es continua sobre $\mathbb{R}^2$.
2. Justificar brevemente que f tiene derivadas parciales sobre $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ y calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ para cualquier $(x,y)\neq(0,0)$.
3. Volviendo a la definición de las derivadas parciales, calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
4. Mostrar que las funciones $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas sobre $\mathbb{R}^2$.