Solución Parcial 1

2011-II FLORENT SCHAFFHAUSER

Ejercicio I

1.La cantidad

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2+y^2-1}} \times \ln(4-(x-2)^2-y^2)$$

está bien definida si y sólo si

$$4-(x-2)^2-y^2 > 0 \tag{1}$$

y

$$(x-2)^2+y^2-1 > 0. \tag{2}$$

La ecuación $4-(x-2)^2-y^2=0$ es la ecuación del círculo de centro $(2,0)$ y de radio 2 y la condición (1) es equivalente a que el punto de coordenadas (x,y) esté en el interior del disco así definido. La ecuación $(x-2)^2+y^2-1=0$ es la ecuación del círculo de centro $(2,0)$ y de radio 1 y la condición (2) es equivalente a que el punto de coordenadas (x,y) esté en el exterior del disco así definido. Luego el dominio de definición de f es la parte del plano definida por

$$\mathcal{D}_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1 < (x-2)^2+y^2 < 4\},$$

la cual es la corona delimitada por los círculos de radio 1 y 2 centrados en el punto $(2,0)$, excluyendo dichos círculos.

2. Sea (x_0,y_0) un punto del círculo de ecuación $(x-2)^2+y^2=4$. Entonces $(x_0-2)^2+y_0^2=4$ y

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\ln(4-(x-2)^2+y^2)}{\sqrt{3}} = \lim_{u\to 0}\frac{\ln u}{\sqrt{3}} = -\infty.$$

3. Por el mismo razonamiento, si (x_0,y_0) es un punto del círculo de ecuación $(x-2)^2+y^2=1$, se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{u\to 0}\frac{\ln 3}{\sqrt{u}} = +\infty.$$

Ejercicio II

1. La curva de nivel 1 de f es la curva

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{1\}) &= \{(x,y)\in]0;+\infty[\times]0;+\infty[\mid f(x,y)=1\} \\ &= \{(x,y)\in]0;+\infty[\times]0;+\infty[\mid x\sqrt{y}=1\}, \end{aligned}$$

es decir la curva de ecuación $y=\frac{1}{x^2}$ en el cuadrante $x>0, y>0$. De manera similar,

$$f^{-1}(\{4\}) = \{(x,y)\in]0;+\infty[\times]0;+\infty[\mid y=\frac{16}{x^2}\}$$

Estas curvas de nivel son arcos de hipérbolas.

Bono : Dos curvas de nivel distintas no pueden tener una intersección no vacía, pues un mismo punto (x,y) no puede tener dos imágenes distintas por una aplicación f.

2. La función f admite derivadas parciales en todo $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ pues es un producto de funciones que admiten derivadas parciales en $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$. Se tiene, para cualquier (x,y) en $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sqrt{y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{y}}.$$

Luego la recta tangente a la curva de nivel 1 de f en el punto $(1,1)$ es la recta de ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) = 0$$

es decir la recta de ecuación

$$2x + y - 3 = 0.$$

3. El plano tangente a la gráfica de f en el punto $(2,1,2)$ es el plano de ecuación

$$z = f(2,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)(y-1)$$

es decir el plano de ecuación $z = 2 + (x-2) + (y-1)$, es decir el plano de ecuación

$$z = x + y - 1.$$

Ejercicio III

1. La función f es continua sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ como cociente, cuyo denominator no se anula, de funciones continuas sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Luego, para demostrar que f es continua sobre $\mathbb{R}^2$, es suficiente demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

Pasando a coordenadas polares, se tiene, para cualquier $r \neq 0$,

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = \left|\frac{r^5(\cos^5\theta - \sin^5\theta)}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}\right| \leq r^3 \times 2 \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Así que $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$, por lo cual

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

y f es continua sobre $\mathbb{R}^2$.

2. La función f admite derivadas parciales sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ como cociente, cuyo denominator no se anula, de funciones que admiten derivadas parciales sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Para cualquier $(x,y) \neq (0,0)$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{5x^4(x^2+y^2) - (x^5-y^5)(2x)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{3x^6 + 5x^4y^2 + 2xy^5}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-5y^4(x^2+y^2) - (x^5-y^5)(2y)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{-3y^6 - 5y^4x^2 - 2yx^5}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

3. Por definición, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}.$$

Pero $f(h,0) = h^3$ para cualquier h. Luego $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} h^2 = 0$. De manera similar, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

4. La función $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ como cociente, cuyo denominator no se anula, de funciones continuas sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Luego, para demostrar que f es continua sobre $\mathbb{R}^2$, es suficiente demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

Pasando a coordenadas polares, se tiene, para cualquier $r \neq 0$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right| &= \left|\frac{r^6(3\cos^6\theta + 5\cos^4\theta\sin^2\theta + 2\cos\theta\sin^5\theta)}{r^4(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2}\right| \\ &\leq r^2 \times 10 \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Luego

$$\lim_{r\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

y $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua sobre $\mathbb{R}^2$. De manera similar, $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua sobre $\mathbb{R}^2$.