Solución del segundo parcial

7 DE ABRIL 2011 FLORENT SCHAFFHAUSER

1. Se tiene $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$ luego $|e^z| < 1$ si y sólo si $\mathrm{Re}\, z < 0$, es decir si $z \in \mathcal{I}$. Luego $\mathrm{Im}\, p \subset D^*(0;1)$. La otra inclusión resulta de la sobreyectividad de exp y de lo que acabamos de decir.

2. Sea $z \in \mathcal{I}$ tal que $e^z = w$. Entonces $e^{\mathrm{Re}\, z} = |w|$ y $e^{i\mathrm{Im}\, z} = e^{i \arg w}$. Luego $\mathrm{Re}\, z = \ln |w|$ y $\mathrm{Im}\, z = \arg w + 2k\pi$ para cierto $k \in \mathbb{Z}$. Luego

$$p^{-1}(\{w\}) = \{\ln |w| + i(\arg w + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

3. $p : \mathcal{I} \to D^*(0;1)$ es un cubrimiento porque exp es un cubrimiento. Al ser simplemente conexo $\mathcal{I}$, p es un cubrimiento universal de $D^(0;1)$.

4. El grupo de Galois del cubrimiento universal de $D^*(0;1)$ es el grupo fundamental de $D^*(0;1)$, es decir $\mathbb{Z}$.

5. La acción del grupo de Galois de p sobre la fibra

$$p^{-1}(\{w\}) = \{\ln |w| + i(\arg w + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$$

es por levantamiento de lazos basados en $w = e^z$. Sea $\gamma : t \mapsto e^{z+i2\pi t}$ un generador de $\pi_1(D^*(0;1); w)$. Entonces

$$\widetilde{\gamma} : t \longmapsto \ln |w| + i(\arg w + 2\pi t)$$

cumple

$$e^{\widetilde{\gamma}(t)} = \gamma(t)$$

(es decir, es un levantamiento de γ). Luego $n \in \mathbb{Z}$ actúa sobre $p^{-1}(\{w\})$ por $\widetilde{\gamma}$ compuesto n veces por si mismo :

$$\begin{aligned} n \cdot \big(\ln |w| + i(\arg w + 2\pi k)\big) &= (\underbrace{\widetilde{\gamma} \circ \cdots \circ \widetilde{\gamma}}_{n\text{veces}})(1) \\ &= \ln |w| + i\big(\arg w + 2\pi(k+n)\big). \end{aligned}$$

6.

a. El cubrimiento q tiene grupo de Galois $H \subset \mathbb{Z}$. Al ser conmutativo $\mathbb{Z}$, es normal el subgrupo H. Luego q es galoisiano.

b. Por la pregunta **5**, la acción de $\pi_1(D^*(0;1); w) \simeq \mathbb{Z}$ sobre $p^{-1}(\{w\}) \subset \mathcal{I}$ es por traslación vertical

$$n \cdot \big(\ln |w| + i(\arg w + 2\pi k)\big) = \ln |w| + i\big(\arg w + 2\pi(k+n)\big).$$

Luego la acción de H sobre $p^{-1}(\{w\})$ es la misma acción, restringida a H. Pero H es un subgrupo de $\mathbb{Z}$, entonces existe un único $r \in \mathbb{N}^*$ tal que $H = r\mathbb{Z}$. Luego H actúa sobre $p^{-1}(\{w\})$ por

$$(rn) \cdot \big(\ln |w| + i(\arg w + 2\pi k)\big) = \ln |w| + i\big(\arg w + 2\pi(k+rn)\big).$$

c. $H = r\mathbb{Z}$ con $r \neq 0$ y H actúa sobre $p^{-1}(\{w\})$ por traslación vertical por rn, $n \in \mathbb{Z}$. Consideremos la aplicación

$$\alpha : \begin{array}{ccc} \mathcal{I} & \longrightarrow & D^*(0;1) \\ z & \longmapsto & e^{\frac{z}{r}} \end{array} .$$

Esta aplicación es sobreyectiva y, por lo que acabamos de ver, H actúa de manera libre y transitiva sobre las fibras de α (también se puede observar directamente que α es un cubrimiento galoisiano, porque $\mathcal{I}$ es simplemente conexo). Luego

$$\mathcal{I}/H \simeq D^*(0;1).$$

d. Por la propiedad universal del cubrimiento universal, tenemos un diagrama comnutativo

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[dd, "p"'] & \\
& X \simeq \mathcal{I}/H \simeq D^*(0;1) \arrow[dl, "q"] \\
D^*(0;1) &
\end{tikzcd}$$

con $p(z) = e^z$ y $\alpha(z) = e^{\frac{z}{r}}$. Si escribimos $u \in X = D^*(0;1)$ bajo la forma $e^{\frac{z}{r}}$ por algún $z \in \mathcal{I}$, entonces

$$q(u) = q \circ \alpha(z) = p(z) = e^z = \left(e^{\frac{z}{r}}\right)^r = u^r$$

y esto no depende de la elección de z en la fibra $\alpha^{-1}(\{u\})$.

7. Sea X un cubrimiento de $D^*(0;1)$. Si X no es isomorfo a p, entonces, por la pregunta **6**, es isomorfo a algún $z \mapsto z^r$ para $r \in \mathbb{N}^*$. En particular, si tiene fibra infinita, es necesariamente isomorfo a $\mathcal{I}$. Además, para cualquier $r \in \mathbb{N}^*$, $z \mapsto z^r$ es un cubrimiento finito de grado r de $D^*(0;1)$.