Solución del primer parcial.

3 DE MARZO 2011 FLORENT SCHAFFHAUSER

1. Para cualquier $R > 0$, sea
$$M(R) := \max_{|z|\leq R} |g(z)|.$$
El principio del máximo implica que M es una función estrictamente creciente de R. Luego
$$\lim_{R\to+\infty} M(R) = +\infty.$$
Además
$$\max_{|z|\leq R} |g(z)| = \max_{|z|=R} |g(z)|$$
luego
$$\lim_{|z|\to+\infty} |g(z)| = +\infty.$$

2. $g = f - f(0)$ es una función holomorfa sobre $\mathbb{C}$ y no constante. Por lo anterior,
$$\lim_{w\to 0} \frac{1}{g\left(\frac{1}{w}\right)} = 0.$$
Luego por el teorema de Riemann sobre singularidades removibles, h admite una extensión holomorfa $\widehat{h}$ a todo $\mathbb{C}$. Necesariamente, $\widehat{h}(0) = 0$. Además $\widehat{h}$ es biyectiva porque h lo es y h nunca es 0.

3. $\widehat{h}$ es una biyección holomorfa de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$. Su recíproca $\widehat{h}^{-1}$ también es holomorfa, luego $\widehat{h}'(0) \neq 0$, lo cual significa precisamente que
$$\lim_{w\to 0} \frac{1}{wg\left(\frac{1}{w}\right)} \neq 0.$$
Se denota $\gamma \in \mathbb{C}^*$ el valor de este límite.

4. Si $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, entonces
$$\lim_{|z|\to+\infty} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{w\to 0} wg\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{\gamma}\cdot$$
Sea $\alpha = \frac{1}{\gamma}$ y $\beta = f(0)$. Entonces, la función
$$z \longmapsto f(z) - (\alpha z + \beta)$$
es holomorfa y tiende a 0 cuando $|z| \to +\infty$. Por el teorema de Liouville, esta función es constante e igual a 0, luego
$$f(z) = \alpha z + \beta$$
sobre $\mathbb{C}$.

5. Se verifica que una transformación de Möbius de tipo
$$z \longmapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0$$
define un automorfismo de $\mathbb{C}\mathbf{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Además el conjunto G de tales transformaciones es un grupo bajo composición. Si $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}\mathbf{P}^1)$, notemos $w = f(\infty) \in \mathbb{C}\mathbf{P}^1$. Si $w \neq \infty$, se considera la aplicación holomorfa
$$g : z \longmapsto \frac{1}{f(z) - w},$$
que es un automorfismo de $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ que satisface $g(\infty) = \infty$ y que difiere de f por un elemento de G. Si $w = \infty$, se pone $g = f$. En cualquier caso, para demostrar que $f \in G$, es suficiente demostrar que $g \in G$. Ya que $g(\infty) = \infty$, la aplicación $g|_{\mathbb{C}}$ es un automorfismo de $\mathbb{C}$. Por lo anterior, existen α y β en $\mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, tales que $g(z) = \alpha z + \beta$. Luego $g \in G$ y f también.

Bono : La aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & G \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \left(z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d} \right) \end{array}$$

es un homomorfismo sobreyectivo de grupos, cuyo núcleo es $\{\pm \mathrm{Id}\}$. Luego

$$G \simeq \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm \mathrm{Id}\} = \mathbf{PSL}_2(\mathbb{C}).$$

6. Sea $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ un automorfismo de $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ tal que $f(\infty) = \infty$, $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Estas tres ecuaciones implican

$$\frac{a}{c} = \infty, \quad \frac{b}{d} = 0, \quad \text{y} \quad \frac{a+b}{c+d} = 1.$$

Luego $c = 0$, $b = 0$ y $a = d$, lo cual implica que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}\mathbf{P}^1}$.

7. Sea

$$g : z \longmapsto \frac{1}{u-z}.$$

Entonces $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}\mathbf{P}^1)$ y $g(u) = \infty$. Se tiene $g(v) = \frac{1}{u-v}$, luego la función

$$h : z \longmapsto g(z) - g(0) = \frac{z-v}{(u-z)(u-v)}$$

es un automorfismo de $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ tal que $h(u) = \infty$ y $h(v) = 0$. Se tiene

$$h(w) = \frac{w-v}{(u-w)(u-v)} \neq 0,$$

luego

$$f : z \longmapsto \frac{1}{h(w)}\, h(z) = \frac{(z-v)(u-w)}{(w-v)(u-z)}$$

es un automorfismo de $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ que satisface

$$f(u) = \infty, \quad f(v) = 0 \quad \text{y} \quad f(w) = 1.$$

Si f_1 es otro automorfismo de $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ que cumple con esta condición, entonces $f_1 \circ f^{-1}$ es la identidad por la pregunta anterior. Luego f es único.

8. Sean $u, v, w, z \in \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ cuatro puntos distintos y sea f el único automorfismo de $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ tal que

$$f(u) = \infty, \quad f(v) = 0 \quad \text{y} \quad f(w) = 1.$$

Si $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}\mathbf{P}^1)$, entonces $g(u), g(v), g(w)$ y $g(z)$ son cuatro puntos distintos de $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ y $f \circ g^{-1}$ es un automorfismo de $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ tal que

$$f \circ g^{-1}\big(g(u)\big) = \infty, \quad f \circ g^{-1}\big(g(v)\big) = 0 \quad \text{y} \quad f \circ g^{-1}\big(g(w)\big) = 1.$$

Luego

$$\begin{aligned} b\big(g(u), g(v), g(w), g(z)\big) &= f \circ g^{-1}\big(g(z)\big) \\ &= f(z) \\ &= b(u, v, w, z). \end{aligned}$$

9. Sea b' otra aplicación con las mismas propiedades de b y sean u, v, w, z cuatro puntos distintos de $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$. Sea f el único automorfismo de $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ tal que

$$f(u) = \infty, \quad f(v) = 0 \quad \text{y} \quad f(w) = 1.$$

Luego

$$\begin{aligned} b'\big(u, v, w, z\big) &= b'\big(\infty, 0, 1, f(z)\big) \\ &= f(z) \\ &= b(u, v, w, z). \end{aligned}$$

10. El único círculo $\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}\mathbf{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ que contiene $0, 1$ y ∞ es $\mathbb{R} \cup \{\infty\} = \mathbb{R}\mathbf{P}^1$. Un punto $z \in \mathbb{C}\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ pertenece a $\mathcal{C}$ si y sólo si $z \in \mathbb{R}$, es decir si y sólo si

$$b(\infty, 0, 1, z) \in \mathbb{R}.$$

Sean u, v, w, z cuatro puntos distintos de $\mathcal{C}'$ y sea f el único automorfismo de $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ que manda u a ∞, v a 0 y w a 1. f manda círculos a círculos entonces u, v, w y z pertenecen a un mismo círculo $\mathcal{C}'$ de $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ si y sólo si $f(z)$ pertenece a $\mathcal{C} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, es decir si y sólo si $f(z) \in \mathbb{R}$. Pero $f(z) = b(u, v, w, z)$, luego u, v, w y z pertenecen a un mismo círculo $\mathcal{C}'$ si y sólo si si y sólo si $b(u, v, w, z) \in \mathbb{R}$.