Solución del examen final

25 de mayo de 2011 — Florent Schaffhauser

Problema 1

1. Se tiene, $\forall z \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned} t_0(z) &= s_0\big(\varphi_0^{-1}(z)\big) \\ &= g_{01}\big(\varphi_0^{-1}(z)\big)s_1\big(\varphi_0^{-1}(z)\big) \\ &= g_{01}(z)s_1 \circ \varphi_1^{-1}\big(\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(z)\big) \\ &= z^n t_1\left(\frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$

2. a. Por la relación demostrada anteriormente, se tiene, para cualquier $z \in \mathbb{C}^*$,

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = z^n\left(b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots\right)$$

Si $n < 0$, esto implica que ambas estas funciones son 0 en $\mathbb{C}^*$, luego en todo $\mathbb{C}$.

b. Si $n \geq 0$, la relación anterior implica que $\forall k > n$, $a_k = 0$ y $b_k = 0$ y además, $\forall k \in \mathbb{C}^*$,

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \cdots + b_n$$

luego

$$b_0 = a_n,\ b_1 = a_{n-1},\ \cdots,\ b_n = a_0.$$

3. Un elemento de $\check{\mathrm{H}}^0\big(\mathbb{C}\mathbf{P}^1; \mathbf{O}(n)\big)$ es una sección holomorfa global de $\mathbf{O}(n)$. Por lo anterior, si $n < 0$, $t_0 = t_1 = 0$ luego $s_0 = s_1 = 0$ y cualquier sección de $\mathbf{O}(n)$ es identicamente nula. Si $n \geq 0$, una sección de $\mathbf{O}(n)$ está determinada por las aplicaciones

$$\begin{aligned} t_0(z) &= a_0 + a_1 z \cdots + a_n z^n \\ \text{y} \quad t_1(w) &= a_n + a_{n-1} w + \cdots + a_0 w^n\ . \end{aligned}$$

De manera formal, sea, para $n \geq 0$, Φ_n la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \check{\mathrm{H}}^0\big(\mathbb{C}\mathbf{P}^1; \mathbf{O}(n)\big) & \longrightarrow & \mathbb{C}_n[w] \\ s & \longmapsto & s|_{U_1} \circ \varphi_1^{-1} = a_n + a_{n-1} w + \cdots + a_0 w^n\ . \end{array}$$

Φ_n es una aplicación lineal biyectiva cuya inversa es

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_n[w] & \longrightarrow & \check{\mathrm{H}}^0\big(\mathbb{C}\mathbf{P}^1; \mathbf{O}(n)\big) \\ t_1 = a_n + a_{n-1} w + \cdots + a_0 w^n & \longmapsto & \big(t_0 : z \mapsto z^n t_1\left(\frac{1}{z}\right), t_1\big)\ . \end{array}$$

4. Por lo anterior, $\dim_{\mathbb{C}} \check{\mathrm{H}}^0\big(\mathbb{C}\mathbf{P}^1; \mathbf{O}(n)\big) = 0$ si $n < 0$ y $\dim_{\mathbb{C}} \check{\mathrm{H}}^0\big(\mathbb{C}\mathbf{P}^1; \mathbf{O}(n)\big) = n + 1$ si $n \geq 0$.

Problema 2

1. O_X^* es un subhaz de $\mathcal{M}_X^*$, por lo que $\ker \alpha = 0$. Mostremos que $\mathcal{M}_X^* \longrightarrow \mathcal{D}_X \longrightarrow 0$ es exacta. Sea $U \subset X$ un abierto y sea $D \in \mathcal{D}_X(U)$. Existe un abierto $V \subset U$ tal que $D|_V$ sea un divisor de la forma

$$x \longmapsto \begin{cases} n \in \mathbb{Z} & \text{si } x = x_0 \\ 0 & \text{si } x \neq x_0 \end{cases}$$

por algún $x_0 \in V$ (así son los gérmenes de divisores). Sea z una coordenada local en x_0 y $f : z \longmapsto (z - x_0)^n$. Entonces $f \in \mathcal{M}^*(V)$ y $D_f = D|_V$. Mostremos, para concluir, que $\ker \beta = \operatorname{Im} \alpha$. Un elemento $f \in \mathcal{M}^*(U)$ está en $\ker \beta$ si y sólo si tiene divisor $D_f = 0$, es decir si y sólo si f es holomorfa y no se anula en U. Luego $\ker \beta = \operatorname{Im} \alpha$.

2.a. La función $\psi_k D_{kl} : U_l \cap U_k \longrightarrow \mathbb{Z}$ es un divisor porque D_{lk} es un divisor y $\operatorname{Im} \psi_k \subset \mathbb{Z}$. Al ser nula ψ_k fuera de U_k, podemos extender $\psi_k D_{lk}$ a todo U_l poniendo $(\psi_k D_{lk})(x) = 0$

si $x \in U_l \setminus U_k$. La función así extendida sigue siendo un divisor (=una combinación lineal ***localmente*** finita de puntos de U_l con coeficientes en $\mathbb{Z}$). Ya que, para cualquier $x \in X$, $\psi_k(x) = 0$ salvo para un número finito de $k \in I$, la suma $\sum_{k\in I} \psi_k(x) D_{lk}(x)$ siempre es una suma finita. Luego la función $\sum_{k\in I} \psi_k D_{lk}$ es bien definida y es un divisor en U_l.

b. Al ser un 1-cociclo la colección $(D_{ij})_{(i,j)\in I\times I}$, se tiene que

$$D_{ij} = -D_{ji} \quad \text{y} \quad D_{ij} + D_{jk} = D_{ik}.$$

Luego, en $U_i \cap U_j$,

$$\begin{aligned} E_i - E_j &= \sum_{k\in I} \psi_k D_{ik} - \sum_{k\in I} \psi_k D_{jk} \\ &= \sum_{k\in I} \psi_k (D_{ik} - D_{jk}) \\ &= \sum_{k\in I} \psi_k D_{ij} \\ &= D_{ij} \left(\sum_{k\in I} \psi_k \right) \\ &= D_{ij} \ , \end{aligned}$$

pues $\sum_{k\in I} \psi_k \equiv 1$ en X.

3. Al ser exacta la succesión corta

$$0 \longrightarrow O_X^* \longrightarrow \mathcal{M}_X^* \longrightarrow \mathcal{D}_X \longrightarrow 0,$$

tenemos una succesión exacta larga de cohomología asociada, que empieza de la siguiente manera

$$\begin{aligned} 0 \quad &\longrightarrow \quad \check{\mathrm{H}}^0(X; O_X^*) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0(X; \mathcal{M}_X^*) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0(X; \mathcal{D}_X) \\ &\longrightarrow \quad \check{\mathrm{H}}^1(X; O_X^*) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1(X; \mathcal{M}_X^*) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1(X; \mathcal{D}_X). \end{aligned}$$

Por la pregunta **2**, se sabe que $\check{\mathrm{H}}^1(X; \mathcal{D}_X) = 0$ y ésto nos da la siguiente succesión exacta

$$0 \to \check{\mathrm{H}}^0(X; O_X^*) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0(X; \mathcal{M}_X^*) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0(X; \mathcal{D}_X) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1(X; O_X^*) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1(X; \mathcal{M}_X^*) \to 0.$$

4. Por la succesión exacta anterior, se tiene una succesión exacta,

$$0 \longrightarrow \underbrace{\check{\mathrm{H}}^0(X; \mathcal{M}_X^*)/\check{\mathrm{H}}^0(X; O_X^*)}_{\mathrm{Div}_{\mathrm{P}}(X)} \longrightarrow \mathrm{Div(X)} \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1(X; \mathcal{M}_X^*) \longrightarrow 0.$$

Luego una succesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Div}(X)/\mathrm{Div}_{\mathrm{P}}(X) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\varepsilon} \check{\mathrm{H}}^1(X; \mathcal{M}_X^*) \longrightarrow 0.$$

Si X es compacta, δ es un isomorfismo luego $\varepsilon = 0$ y $\check{\mathrm{H}}^1(X; \mathcal{M}_X^*) = 0$.