

Superficies de Riemann

2011-I

FLORENT SCHAFFHAUSER

1. DATOS DEL CURSO

- Nombre del curso : *Superficies de Riemann*
- Profesor : Florent Schaffhauser
- Código del curso : MATE-4405
- Créditos : 4
- Prerequisitos :
 - Variable compleja
 - Geometría diferencial

2. OBJETIVOS

El objetivo del curso es dar una introducción a la teoría de superficies de Riemann, enfatizando varios enfoques : analítico, topológico y algebraico. Se dará una introducción a la noción de fibrado vectorial (en rectas) sobre una superficie de Riemann y se estudiará en particular la jacobiana de tal superficie. Se presentará también una demostración del teorema de Riemann-Roch para superficies de Riemann compactas.

3. CONTENIDO (15 SEMANAS)

- (1) **Teoría básica** (3 semanas)
 - (a) **Repaso de análisis complejo**
 - (i) Funciones holomorfas y meromorfas
 - (ii) Formal normal local
 - (iii) La esfera de Riemann
 - (b) **Superficies de Riemann**
 - (i) Haces sobre un espacio topológico
 - (ii) Espacios anillados
 - (iii) Ejemplos de superficies de Riemann
 - (c) **Grupos de automorfismos de algunas superficies de Riemann**
 - (i) $\text{Aut}(\mathbb{C})$, $\text{Aut}(\mathcal{H})$, $\text{Aut}(\mathcal{D})$
 - (ii) $\text{Aut}(\mathbb{CP}^1)$
 - (iii) Curvas elípticas
- (2) **Aplicaciones entre superficies de Riemann** (4 semanas)
 - (a) **Grado de una aplicación holomorfa**
 - (i) Puntos de ramificación
 - (ii) Grado
 - (iii) Aplicaciones holomorfas propias y cubrimientos ramificados
 - (b) **Cubrimientos topológicos**
 - (i) Definición
 - (ii) Grupos de automorfismos de cubrimientos
 - (iii) Teoría de Galois de los cubrimientos I
 - (c) **El cubrimiento universal y su grupo de automorfismos**
 - (i) El primer grupo de homotopía de un espacio topológico
 - (ii) Construcción del cubrimiento universal
 - (iii) Teoría de Galois de los cubrimientos II
- (3) **Topología de superficies de Riemann** (1 semana)
 - (a) **Superficies compactas orientables**
 - (i) Repaso de teoría de superficies
 - (ii) Género
 - (iii) Estructuras complejas sobre un toro
 - (b) **Característica de Euler-Poincaré**
 - (i) Definición

- (ii) Propiedades
- (iii) Ejemplos
- (c) **Fórmula de Riemann-Hurwitz**
 - (i) Índice de ramificación
 - (ii) Demostración de la fórmula
 - (iii) Aplicaciones
- (4) **Extensión analítica y monodromía** (4 semanas)
 - (a) **Gérmenes de funciones holomorfas**
 - (i) El anillo local $O_{X,x}$
 - (ii) Fibra de un prehaz en un punto
 - (iii) El espacio *étalé* asociado a un prehaz
 - (b) **Extensión analítica a lo largo de una curva**
 - (i) Formulación geométrica del problema
 - (ii) El principio de monodromía
 - (iii) Ecuaciones diferenciales con coeficientes holomorfos
 - (c) **La superficie de Riemann de una función algebraica**
 - (i) Cuerpos de funciones meromorfas
 - (ii) Cubrimientos analíticos y extensiones de cuerpos
 - (iii) Funciones algebraicas
- (5) **Teoría de la jacobiana** (3 semanas)
 - (a) **Fibrados en rectas**
 - (i) El grupo de Picard
 - (ii) Ejemplos
 - (iii) El haz de secciones holomorfas de un fibrado
 - (b) **El teorema de Riemann-Roch**
 - (i) Secciones meromorfas
 - (ii) Divisores
 - (iii) Riemann-Roch y aplicaciones
 - (c) **Los teoremas de Abel y Jacobi**
 - (i) Períodos
 - (ii) El teorema de Abel
 - (iii) Inversión de Jacobi

4. EVALUACIÓN

- 2 parciales ($2 \times 15\%$)
- 1 tarea (15%)
- 1 presentación oral (15%)
- 1 examen final (40%)

REFERENCES

- [FK92] H. M. Farkas and I. Kra. *Riemann surfaces*, volume 71 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1992.
- [For91] Otto Forster. *Lectures on Riemann surfaces*, volume 81 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. Translated from the 1977 German original by Bruce Gilligan, Reprint of the 1981 English translation.
- [Hit99] Nigel Hitchin. Riemann surfaces and integrable systems. In *Integrable systems (Oxford, 1997)*, volume 4 of *Oxf. Grad. Texts Math.*, pages 11–52. Oxford Univ. Press, New York, 1999. Notes by Justin Sawon.