UNIVERSIDAD DE LOS ANDES SUPERFICIES DE RIEMANN

Examen oral (Parcial 3)

9 DE MAYO DE 2011 FLORENT SCHAFFHAUSER

Modalidades del examen : 20 minutos de preparación, 10 minutos de presentación oral y 5 minutos de preguntas. Ejercicios : un ejercicio escogido entre los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1. Sea $f : Y \to X$ una aplicación holomorfa no constante de grado finito igual a d entre superficies de Riemann compactas y conexas. Se denota g_X el género de X y g_Y el género de Y. Si y es un punto de Y, se denota k_y la multiplicidad de f en y.

1. Mostrar que si $X = \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ y $d \geq 2$, entonces f tiene puntos de ramificación.

2. Mostrar que si $g_Y = g_X = 1$, entonces f no tiene ramificación.

3. Mostrar que si $g_Y = g_X \geq 2$, entonces f es un isomorfismo.

4. Mostrar que $g_Y \geq g_X$. *Indicación* : Se podrá observar que el caso $g_X = 0$ es evidente.

Ejercicio 2. Sea $f : Y \to X$ una aplicación holomorfa no constante de grado finito igual a d entre superficies de Riemann compactas y conexas. Se denota g_X el género de X y g_Y el género de Y. Si y es un punto de Y, se denota k_y la multiplicidad de f en y. Se denota $B := \sum_{y \in Y}(k_y - 1)$.

1. Mostrar que la suma que define B es una suma finita y que B es un entero par.

2. Se supone de ahora en adelante que f no tiene ramificación.

- **a**. Mostrar que si $g_Y = 0$, entonces $d = 1$ y $g_X = 0$.
- **b**. Mostrar que si $g_Y = 1$, entonces $g_X = 1$.
- **c**. Mostrar que si $g_Y \geq 2$ y $d = 1$, entonces $g_Y = g_X$.
- **d**. Mostrar que si $g_Y \geq 2$ y $d \geq 2$, entonces $g_Y > g_X$.

Ejercicio 3. Sea $f : Y \to X$ una aplicación holomorfa no constante de grado finito igual a d entre superficies de Riemann compactas y conexas. Se denota g_X el género de X y g_Y el género de Y. Si y es un punto de Y, se denota k_y la multiplicidad de f en y. Se denota $B := \sum_{y \in Y}(k_y - 1)$.

1. Mostrar que la suma que define B es una suma finita y que B es un entero par.

2. Mostrar que si $g_Y = 0$, entonces $g_X = 0$.

3. Mostrar que si $g_Y = g_X = 1$, entonces f no tiene ramificación.

4. Mostrar que no existen aplicaciones holomorfas no ramificadas entre una superficie de Riemann Y compacta y conexa de género 27 y una superficie de Riemann compacta y conexa de género 10.

Ejercicio 4. Sea $p : Y \to X$ un cubrimiento topológico. Sea $x \in X$ y $y \in p^{-1}(\{x\})$. Para cualquier lazo γ basado en x, se denota $\widetilde{\gamma}$ el único levantamiento de γ a Y tal que $\widetilde{\gamma}(0) = y$.
1. Mostrar que si γ es homótopicamente trivial, entonces $\widetilde{\gamma}$ es un lazo basado en y y es homótopicamente trivial.

2. Mostrar que el conjunto $G := \{[\gamma] \in \pi_1(X, x) \mid \widetilde{\gamma} \text{ es un lazo basado en } y\}$ es un subgrupo de $\pi_1(X, x)$.

3. Mostrar que G es isomorfo a $\pi_1(Y, y)$.

4. Sea $N(G)$ el normalizador de G en $\pi_1(X, x)$. Mostrar que el grupo de automorfismos del cubrimiento $Y \to X$ es isomorfo a $N(G)/G$.