Parcial 2, duración 1h30.

7 de abril 2011 Florent Schaffhauser

Sea
$$\mathcal{I} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}$$
el semiplano izquierdo del plano complejo y sea p la aplicación
$$p := \exp|_{\mathcal{I}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{I} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & e^z \end{array} .$$

1. Mostrar que $\operatorname{Im} p = D^*(0;1)$, el disco punteado de centro 0 y de radio 1.

2. Fijemos de una vez por todas un punto $w \in D^*(0;1)$. Mostrar que
$$p^{-1}(\{w\}) = \{\ln|w| + i(\arg w + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\},$$
donde arg es la determinación principal del argumento.

3. Mostrar que p es el cubrimiento universal de $D^*(0;1)$.

4. Mostrar que el grupo de Galois de ese cubrimiento es $\mathbb{Z}$.

5. Mostrar que, vía esta identificación, el elemento n de $\mathbb{Z}$ actúa sobre $p^{-1}(\{w\})$ por traslación vertical
$$n \cdot x = x + i2\pi n.$$

6. Sea $q : X \to D^*(0;1)$ un cubrimiento conexo de $D^*(0;1)$ que no es isomorfo a p y sea
$$H = \operatorname{Gal}\big(\mathcal{I}/X\big) \subset \operatorname{Gal}\big(\mathcal{I}/D^*(0;1)\big) \simeq \mathbb{Z}$$
el grupo que le corresponde vía la correspondencia de Galois.

- **a.** Mostrar que q es galoisiano.
- **b.** Mostrar que existe un único $r \in \mathbb{N}^*$ tal que la acción de H sobre $p^{-1}(\{w\})$ sea la traslación vertical por elementos de la forma rn, donde $n \in \mathbb{Z}$. *Indicación* : Utilizar la pregunta **5**.
- **c.** Mostrar que $\mathcal{I}/H$ es homeomorfo a $D^*(0,1)$ y que, vía esta identificación, el cubrimiento $\mathcal{I} \to \mathcal{I}/H$ es el cubrimiento
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I} & \longrightarrow & D^*(0;1) \\ z & \longmapsto & e^{\frac{z}{r}} \end{array} ,$$
donde r es el entero hallado en la pregunta **b**.
- **d.** Deducir de lo anterior que $q : X \to D^*(0;1)$ es isomorfo al cubrimiento
$$\begin{array}{ccc} D^*(0;1) & \longrightarrow & D^*(0;1) \\ z & \longmapsto & z^r \end{array} .$$

7. Concluir de la siguiente manera : un cubrimiento X de $D^*(0;1)$ es isomorfo a $\mathcal{I}$ si tiene fibra infinita e isomorfo a algún $z \mapsto z^r$ si tiene fibra finita. Para cualquier $r > 0$, existe un cubrimiento finito de grado r de $D^*(0;1)$.