Parcial 1, duración 1h30.

3 de marzo 2011 — Florent Schaffhauser

1. Mostrar que si $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa y no constante, entonces

$$\lim_{|z|\to+\infty} |g(z)| = +\infty.$$

2. Deducir de lo anterior que si f es un automorfismo de $\mathbb{C}$ y si $g : z \mapsto f(z) - f(0)$, entonces la función

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ w & \longmapsto & \frac{1}{g(\frac{1}{w})} \end{array}$$

admite una extensión holomorfa $\widehat{h}$ a $\mathbb{C}$, que es biyectiva y satisface $\widehat{h}(0) = 0$.
3. Deducir de lo anterior que

$$\lim_{w\to 0} \frac{1}{wg(\frac{1}{w})} = \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

4. Deducir de lo anterior que $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ es una aplicación de la forma

$$z \longmapsto \alpha z + \beta$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$.
5. Mostrar que

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}\mathbf{P}^1) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}.$$

Bono : Identificar este grupo con

$$\mathbf{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm \mathrm{Id}\}.$$

6. Mostrar que si $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}\mathbf{P}^1)$ satisface

$$f(\infty) = \infty, f(0) = 0 \text{ y } f(1) = 1,$$

entonces $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}\mathbf{P}^1}$.
7. Sean $u, v, w \in \mathbb{C}\mathbf{P}^1$, distintos. Mostrar que existe un único $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}\mathbf{P}^1)$ tal que

$$f(u) = \infty, f(v) = 0 \text{ y } f(w) = 1.$$

Indicación : Se podrá definir primero $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}\mathbf{P}^1)$ tal que $g(u) = \infty$, luego $h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}\mathbf{P}^1)$ tal que $h(u) = \infty$ y $h(v) = 0$.
8. Sean $u, v, w, z \in \mathbb{C}\mathbf{P}^1$, distintos. Se pone

$$\mathbf{b}(u, v, w, z) = f(z) \in \mathbb{C},$$

donde f es el automorfismo de $\mathbb{C}\mathbf{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definido en la pregunta anterior. Esto define una función $\mathbf{b}$ de (u, v, w, z) cuando u, v, w, z son cuatro puntos distintos de $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$, llamada *razón cruzada* de u, v, w y z. Mostrar que si $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}\mathbf{P}^1)$, entonces

$$\mathbf{b}\big(g(u), g(v), g(w), g(z)\big) = \mathbf{b}(u, v, w, z).$$

9. Mostrar que la aplicación $\mathbf{b}$ es la única aplicación que a cuatro puntos distintos de $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ asocia un número complejo tal que

(i) $\forall z \in \mathbb{C}\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, $\mathbf{b}(\infty, 0, 1, z) = z$.
(ii) $\forall g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}\mathbf{P}^1)$,

$$\mathbf{b}\big(g(u), g(v), g(w), g(z)\big) = \mathbf{b}(u, v, w, z).$$

10. Sea $\mathcal{C}$ el único círculo de $\mathbb{C}\mathbf{P}^1 \simeq S^2$ que contiene 0,1 y ∞. Mostrar que $z \in \mathbb{C}\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ pertenece a $\mathcal{C}$ si y sólo si

$$\mathbf{b}(\infty, 0, 1, z) \in \mathbb{R}.$$

Deducir de esto que (u, v, w, z) distintos pertenecen a un mismo círculo de $\mathbb{C}\mathbf{P}^1 \simeq S^2$ si y sólo si

$$\mathbf{b}(u, v, w, z) \in \mathbb{R}.$$