Examen final, duración 3h.

Problema 1

Se considera la esfera de Riemann $\mathbb{C}\mathbf{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con su cubrimiento abierto usual

$$U_0 = \mathbb{C} \quad \text{y} \quad U_1 = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$$

y las cartas locales

$$\varphi_0 : \begin{array}{ccc} U_0 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \quad \text{y} \quad \varphi_1 : \begin{array}{ccc} U_1 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{C}^* \\ 0 & \text{si } x = \infty \end{array} \right. \end{array} .$$

Las aplicaciones inversas son

$$\varphi_0^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & U_0 \\ z & \longmapsto & z \end{array} \quad \text{y} \quad \varphi_1^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & U_1 \\ w & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{w} & \text{si } w \neq 0 \\ \infty & \text{si } w = 0 \end{array} \right. \end{array} .$$

Se recuerda que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(z) = \frac{1}{z} \cdot$$

Sea $n \in \mathbb{Z}$. Se denota $\mathbf{O}(n)$ el fibrado en rectas sobre $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ asociado al cociclo de funciones de transición determinado por

$$g_{01} : \begin{array}{ccc} U_0 \cap U_1 = \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ x & \longrightarrow & x^n \end{array}$$

y se recuerda que una sección holomorfa de este fibrado está determinada por dos aplicaciones holomorfas

$$s_0 : U_0 \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{y} \quad s_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{C}$$

que cumplen con la condición

$$\forall x \in U_0 \cap U_1, s_0(x) = g_{01}(x) s_1(x). \tag{1}$$

Se denota, para $i = 0, 1$,

$$t_i := s_i \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

1. Mostrar que, para cualquier $z \in \mathbb{C}^*$,

$$t_0(z) = z^n t_1\left(\frac{1}{z}\right) \cdot$$

Indicación : Usar la definición de t_0 y la relación (1).

2. Se consideran las siguientes expansiones en serie de potencias de t_0 y t_1 :

$$\begin{array}{rcl} t_0(z) & = & a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \\ \text{y} \quad t_1(w) & = & b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \cdots . \end{array}$$

a. Mostrar que si $n < 0$, entonces $\forall k \geq 0$, $a_k = 0$ y $b_k = 0$.

b. Mostrar que si $n \geq 0$, entonces $\forall k > n$, $a_k = 0$ y $b_k = 0$ y además

$$b_0 = a_n, \ b_1 = a_{n-1}, \ \cdots \ , \ b_n = a_0.$$

3. Deducir de lo anterior que

$$\check{\mathrm{H}}^0\big(\mathbb{C}\mathbf{P}^1; \mathbf{O}(n)\big) = \left\{ \begin{array}{ll} \{0\} & \text{si } n < 0 \\ \mathbb{C}_n[T] & \text{si } n \geq 0 \end{array} \right.$$

donde $\mathbb{C}_n[T]$ es el espacio vectorial complejo de los polinomios de grado menor o igual a n con coeficientes en $\mathbb{C}$.

4. ¿Cuál es la dimensión de $\check{\mathrm{H}}^0\big(\mathbb{C}\mathbf{P}^1; \mathbf{O}(n)\big)$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$?

Problema 2

Sea X una superficie de Riemann y sea $U \subset X$ un abierto. Se define

$$\mathcal{D}_X(U) = \{D : U \to \mathbb{Z} \mid D \text{ es un divisor sobre } U\}.$$

Si $V \subset U$ es una inclusión entre abiertos de X, se tiene un homomorfismo de restricción

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_X(U) & \longrightarrow & \mathcal{D}_X(V) \\ D & \longmapsto & D|_V \end{array}$$

de tal manera que $\mathcal{D}_X$ es un haz de grupos abelianos sobre X. Se denota $\mathcal{M}_X^*$ el haz de funciones meromorfas en X que no son identicamente nulas y O_X^* el haz de funciones holomorfas en X que no se anulan :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_X^*(U) & = & \{f \in \mathcal{M}_X(U) \mid f \not\equiv 0\}, \\ O_X^*(U) & = & \{f \in O_X(U) \mid \forall x \in U, f(x) \neq 0\}. \end{array}$$

Sea $\alpha : O_X^* \longrightarrow \mathcal{M}_X^*$ la inclusión natural y sea $\beta : \mathcal{M}_X^* \longrightarrow \mathcal{D}_X$ el homomorfismo de haces definido de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_X^*(U) & \longrightarrow & \mathcal{D}_X(U) \\ f & \longmapsto & D_f \end{array}$$

donde se denota D_f el divisor asociado a la función meromorfa no identicamente nula f.

1. Mostrar que la sucesión

$$0 \longrightarrow O_X^* \longrightarrow \mathcal{M}_X^* \longrightarrow \mathcal{D}_X \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de haces.
Indicación : Para demostrar que la parte $\mathcal{M}_X^* \longrightarrow \mathcal{D}_X \longrightarrow 0$ es exacta, es suficiente demostrar que si $D : U \longrightarrow \mathbb{Z}$ con U un abierto de carta es un divisor de la forma

$$x \longmapsto \begin{cases} n \in \mathbb{Z} & \text{si } x = x_0 \\ 0 & \text{si } x \neq x_0 \end{cases}$$

(donde x_0 es un punto de U), entonces D es el divisor de una función $f \in \mathcal{M}_X^*(U)$.

2. En esta pregunta, se busca demostrar que

$$\check{\mathrm{H}}^1(X; \mathcal{D}_X) = \{0\}.$$

Para eso, es suficiente demostrar que, para cualquier cubrimiento $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X, se tiene

$$\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{D}_X) = \{0\},$$

es decir que cualquier 1-cociclo de divisores

$$D_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathbb{Z}$$

es un coborde

$$D_{ij} = E_i - E_j,$$

donde $E_k : U_k \to \mathbb{Z}$ es un divisor. Para construir $(E_k)_{k \in I}$, se considera una partición de la unidad con valores en $\mathbb{Z}$ con respecto al cubrimiento $(U_k)_{k \in I}$, es decir una colección $(\psi_k)_{k \in I}$ de aplicaciones $\psi_k : X \to \mathbb{Z}$ tales que :

1. $\forall x \in X, \psi_k(x) \in \{0; 1\}$,
2. $\forall x \notin U_k, \psi_k(x) = 0$,
3. $\forall x \in X$, existe un abierto $V \ni x$ tal que $\psi_k|_V \equiv 0$ salvo por un número finito de $k \in I$,
4. $\sum_{k \in I} \psi_k \equiv 1$.

Se acepta la existencia de tal colección[1] $(\psi_k)_{k \in I}$ y se considera, para cualquier $l \in I$, la función

$$E_l := \sum_{k \in I} \psi_k D_{lk}.$$

[1] Se puede observar que las condiciones 1 y 4 implican que, $\forall x \in X$, $\exists!\ k \in I \mid \psi_k(x) = 1$.

a. Mostrar que E_l es un divisor bien definido sobre todo U_l.
Indicación : Mostrar que, para cualquier $k \in I$, el divisor

$$\psi_k D_{lk} : U_l \cap U_k \longrightarrow \mathbb{Z}$$

se extende a todo U_l y que, para cualquier $x \in U_l$, la suma $\sum_{k \in I} \psi_k(x) D_{lk}(x)$ es una suma finita.

b. Deducir de lo anterior que, para cualquier $(i, j) \in I \times I$,

$$E_i - E_j = D_{ij} \text{ en } U_i \cap U_j.$$

Indicación : Utilizar que $(D_{ij})_{(i,j) \in I \times I}$ es un 1-cociclo.

3. Mostrar que se tiene la siguiente sucesión exacta de grupos abelianos

$$0 \to \check{\mathrm{H}}^0(X; \mathcal{O}_X^*) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0(X; \mathcal{M}_X^*) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0(X; \mathcal{D}_X) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1(X; \mathcal{O}_X^*) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1(X; \mathcal{M}_X^*) \to 0.$$

4. Se recuerda que

$$\begin{array}{rcl} \check{\mathrm{H}}^1(X; \mathcal{O}_X^*) & = & \mathrm{Pic}(X), \\ \check{\mathrm{H}}^0(X; \mathcal{D}_X) & = & \mathrm{Div}(X), \\ \check{\mathrm{H}}^0(X; \mathcal{M}_X^*)/\check{\mathrm{H}}^0(X; \mathcal{O}_X^*) & = & \mathrm{Div}_{\mathrm{P}}(X), \end{array}$$

donde el último grupo es el grupo de divisores principales de X (los divisores asociados a una función meromorfa global en X). También se recuerda que si X es compacta, entonces la aplicación

$$\mathrm{Div}(X)/\mathrm{Div}_{\mathrm{P}}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$$

inducida por la sucesión exacta anterior es un isomorfismo de grupos abelianos. Mostrar entonces que, si X es compacta,

$$\check{\mathrm{H}}^1(X; \mathcal{M}_X^*) = \{0\}.$$