

Hoja de ejercicios 8 : divisores, fibrados en rectas, Riemann-Roch

EJERCICIO 1. Sea M una superficie de Riemann y f, g dos funciones meromorfas no idénticamente nulas sobre M . Se denota D_h el divisor asociado a una función meromorfa h .

- a. Recordar la definición de D_h .
- b. Mostrar que $D_{\frac{1}{f}} = -D_f$ y que $D_{fg} = D_f + D_g$.
- c. Mostrar que si M es compacta, $\deg D_f = 0$.
- d. Mostrar que si D es un divisor sobre M , existe un cubrimiento abierto $(U_i)_{i \in I}$ de M y unas funciones meromorfas no idénticamente nulas f_i tal que $D|_{U_i}$ sea el divisor asociado a f_i .
- e. Mostrar que si $g_i \in O_M^*(U_i)$, el divisor asociado a $f_i g_i$ es igual al divisor asociado a f_i .

EJERCICIO 2. Sea (M, O_M) una superficie de Riemann.

- a. Mostrar que la sucesión

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & O_M & \longrightarrow & O_M^* \\ n & \longmapsto & n & & \\ & & f & \longmapsto & \exp(i2\pi f) \end{array}$$

es una sucesión exacta corta de haces.
 b. El homomorfismo de conexión en la sucesión exacta larga asociada se llama el **grado**

$$\deg : \check{H}^1(M; O_M^*) \longrightarrow \check{H}^2(M; \mathbb{Z}).$$

Mostrar que dos fibrados holomorfos en rectas sobre $M = \mathbb{C}P^1$ son isomorfos si y sólo si tienen mismo grado. *Indicación* : Explicitar la sucesión exacta larga de cohomología a la que se aludió anteriormente. Se podrá usar que, cuando M es compacta y conexa, $\dim_{\mathbb{C}} \check{H}^1(M; O_M) = g$, el género de M .

EJERCICIO 3. Sea M una superficie de Riemann, \mathcal{M}_M el haz de funciones meromorfas sobre M , D un divisor y U un abierto de M . Se define

$$O_D(U) = \{f \in \mathcal{M}_M(U) \mid D_f \geq -D\}.$$

- a. Mostrar que O_D es un haz sobre M .
- b. Sea \mathcal{L}_D el fibrado en rectas asociado a D . Mostrar que existe un isomorfismo entre O_D y el haz de secciones holomorfas de \mathcal{L}_D .

- c. Se acepta que $\deg \mathcal{L}_D = \deg D$. Mostrar que si $\deg \mathcal{L}_D < 0$, entonces \mathcal{L}_D no tiene secciones holomorfas globales que no sean idénticamente nulas.

EJERCICIO 4. Sea M una superficie de Riemann compacta y conexa de género g y sea $x_0 \in M$.

- a. Mostrar que existe una función meromorfa no constante sobre M que tiene un polo de orden a lo sumo $g + 1$ en x_0 y que es holomorfa sobre $M \setminus \{x_0\}$. *Indicación* : Considerar el divisor

$$D : x \longmapsto \begin{cases} g + 1 & \text{si } x = x_0, \\ 0 & \text{si } x \neq x_0, \end{cases}$$

- y aplicar el teorema de Riemann-Roch.
- b. Mostrar que existe un cubrimiento ramificado $M \rightarrow \mathbb{C}P^1$ de grado a lo sumo $g + 1$.
- c. Se supone ahora que $g = 0$. Mostrar que $M \simeq \mathbb{C}P^1$.

EJERCICIO 5. Se considera la superficie de Riemann $M = \mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y su cubrimiento usual por abiertos de carta, $U_0 = \mathbb{C}$ y $U_1 = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$. Sea D el divisor

$$z \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } z = 0, \\ 0 & \text{si } z \neq 0, \end{cases}$$

- y sea \mathcal{L}_D el fibrado en rectas asociado.
- a. Mostrar que \mathcal{L}_D se puede representar por el cociclo de funciones de transición determinado por

$$g_{01} : \begin{array}{ccc} U_0 \cap U_1 = \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & z. \end{array}$$

- b. Sea $\mathcal{H} = \{(\ell, v) \in \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2 \mid v \in \ell\}$.

Mostrar que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C}P^1 \\ (\ell, v) & \longmapsto & \ell \end{array}$$

es un fibrado en rectas sobre $\mathbb{C}P^1$ y que este fibrado se puede representar por el cociclo de funciones de transición determinado por

$$g_{01} : \begin{array}{ccc} U_0 \cap U_1 = \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & z. \end{array}$$

- c. Deducir de lo anterior que $\mathcal{H} \simeq \mathcal{L}_D$ y que $\deg \mathcal{H} = 1$.