# Hoja de ejercicios 7 : extensión analítica, monodromía

2011-I — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Sea $X$ una superficie de Riemann y, para cualquier abierto $U$ de $X$, sea

$$\mathcal{M}_X(U) = \{f : U \to \mathbb{C}\mathbf{P}^1 \mid f \not\equiv \infty\}$$

el conjunto de funciones meromorfas sobre $U$.

**a.** Mostrar que $\mathcal{M}_X$ es un haz de $\mathbb{C}$-álgebras sobre $X$.

**b.** Sea $x \in X$. Mostrar que la fibra $\mathcal{M}_{X,x}$ del haz de funciones meromorfas es una $\mathbb{C}$-álgebra isomorfa a la $\mathbb{C}$-álgebra $\mathbb{C}\{\{z-x\}\}$ de series de Laurent convergentes

$$\mathbb{C}\{\{z-x\}\} := \left\{ \sum_{k=-n}^{+\infty} c_k (z-x)^k \mid \text{cv} \right\}.$$

Ejercicio 2. Sea $(X, O_X)$ una superficie de Riemann y sea $x \in X$. Mostrar que $O_{X,x} := \varinjlim_{U \ni x} O_X(U)$ es un anillo local cuyo único ideal máximo es

$$\mathfrak{m}_x := \{f_x \in O_{X,x} : f \in \mathcal{F}(U), f(x) = 0\}.$$

Ejercicio 3. Se considera la ecuación diferencial

$$y' = f\,y \tag{1}$$

en la superficie de Riemann $X = \mathbb{C}^*$, donde $f : X \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa con una singularidad de tipo polo en 0. Se denota $O_X$ el haz de funciones holomorfas en $X$ y, para cualquier abierto $U$ de $X$, se considera el conjunto

$$\mathcal{F}(U) := \{y \in O_X(U) \mid y' = f\,y\}$$

de soluciones en $U$ de la ecuación diferencial (1).

**1.** Mostrar que $\mathcal{F}$ es un haz de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales en $X$.

**2.** Sea $x \in X$ y sea $\mathcal{F}_x$ la fibra de $\mathcal{F}$ en $x$. Mostrar que la aplicación

$$\Phi_x : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}_x & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \rho_x(y) & \longmapsto & y(x) \end{array}$$

es un isomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales.

**3.** Sea $U$ un abierto conexo de $X$ y sea $x \in U$. Mostrar que si $y_1$ y $y_2$ son dos elementos de $\mathcal{F}(U)$ tales que $\rho_x(y_1) = \rho_x(y_2)$ entonces $y_1 = y_2$.

**4.** Sea $\gamma : [0;1] \longrightarrow X$ un camino en $X$ y sea $\varphi_0 \in \mathcal{F}_{\gamma(0)}$.

**a.** Mostrar que existe un levantamiento de $\gamma$ a la realización geométrica $X_{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ tal que $\widetilde{\gamma}(0) = \varphi_0$.

**b.** Mostrar que este levantamiento es único.

**5.** Sea $\gamma_0$ el camino

$$\gamma_0 : \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ t & \longmapsto & e^{i2\pi t} \end{array}.$$

**a.** Mostrar que el levantamiento de lazos basados en 1 (cf. pregunta **4**) define una representación lineal

$$\chi : \begin{array}{ccc} \pi_1(X;1) & \longrightarrow & \mathbf{GL}(\mathcal{F}_1) \\ \gamma & \longmapsto & (\chi(\gamma) : \varphi_0 \mapsto \varphi_1) \end{array} \tag{2}$$

(se trata de demostrar que, para cualquier $\gamma \in \pi_1(X,1)$, $\chi(\gamma)$ es una aplicación lineal biyectiva y que $\chi$ es un homomorfismo de grupos).

**b.** Se supone que existe una primitiva $F_0$ de $f$ en $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-$ y una primitiva $F_1$ de $f$ en $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_+$ que además coincide con $F_0$ en $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < 0\}$. Se denota $e^{F_0}$ (resp. $e^{F_1}$) el germen de $\exp \circ F_0$ (resp. $\exp \circ F_1$) en 1.
Mostrar que

$$e^{F_1} = \lambda_0 e^{F_0}$$

donde $\lambda_0 = \chi(\gamma_0)$. *Indicación*: eso significa que $e^{F_1}$ se obtiene a partir de $e^{F_0} \in \mathcal{F}_1$ por levantamiento de $\gamma_0$ a $X_{\mathcal{F}}$ con la condición inicial $\widetilde{\gamma}(0) = e^{F_0}$.

**c.** Deducir de lo anterior que

$$(\exp \circ F_1)(1) = \lambda_0\,(\exp \circ F_0)(1).$$

**d.** Mostrar que

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \big(F_0(-1) - F_0(1)\big) + (F_1(1) - F_1(-1))$$

y deducir de ello que

$$\lambda_0 = \exp\left(\int_{\gamma_0} f(z)\,dz\right).$$

*Observación*: la conclusión del ejercicio es que la representación (2) sólo depende del residuo en su único polo del coeficiente $f$ en la ecuación (1).

**e.** Calcular $\lambda_0 \in \mathbb{C}^*$ cuando $f(z) = \frac{1}{z}$ en $\mathbb{C}^*$ y determinar $\chi(k) \in \mathbb{C}^*$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ cuando se identifica $\pi_1(\mathbb{C}^*;1)$ con $\mathbb{Z}$ mediante el generador $\gamma_0$.