Hoja de ejercicios 4 : Ejemplos de superficies de Riemann

2011-I — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Mostrar que una superficie de Riemann es una variedad diferenciable *orientable*.

Ejercicio 2. Sea
$$\Gamma = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 \subset \mathbb{C}$$
un retículo de $\mathbb{C}$ (en particular, $\mathbb{C} = \mathbb{R}w_1 + \mathbb{R}w_2$) y sea
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & S^1 \times S^1 \\ \lambda w_1 + \mu w_2 & \longmapsto & (e^{i2\pi\lambda}, e^{i2\pi\mu}) \end{array}.$$
Mostrar que f induce un homeomorfismo de $\mathbb{C}/\Gamma$ sobre el toro $S^1 \times S^1$ y que este homeomorfismo es un isomorfismo de grupos.

Ejercicio 3. a. Sea $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una biyección holomorfa tal que $g(0) = 0$. Mostrar que la función $h : w \in \mathbb{C}^* \mapsto \frac{1}{g(1/w)}$ se extende a una biyección holomorfa de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$.
b. Mostrar que el grupo de automorfismos de $\mathbb{C}$ es $\{z \mapsto \alpha z + \beta \,:\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0\}$. *Indicación* : Se podrá mostrar que, si $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, $\lim_{|z|\to+\infty} \frac{f(z)-f(0)}{z}$ es finito.
c. Identificar este grupo con el producto semi-directo $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*$, donde $\mathbb{C}^*$ actúa sobre $\mathbb{C}$ por $\alpha \cdot \beta = \alpha\beta$.

Ejercicio 4. a.Mostrar que el grupo de automorfismos de
$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$$
es
$$\left\{ z \mapsto \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}} \,:\, a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 > 0 \right\}.$$
Indicación : Mostrar primero que este grupo está contenido en $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ y utilizar una transformación bien escogida en este grupo para ponerse en la situación del lema de Schwarz.
b. Identificar este grupo con
$$\mathbf{PSU}_{1,1} := \mathbf{SU}_{1,1}/\{\pm \mathrm{Id}\}.$$
Indicación : Recordar que $\mathbf{SU}_{1,1} =$
$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \,:\, a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$$
es el grupo de isometrías de $\mathbb{C}^2$ con la métrica $h(u,v) = -\overline{u_1}v_1 + \overline{u_2}v_2$ que además tienen determinante 1.

Ejercicio 5. a. Mostrar que la transformación de Cayley
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{z-i}{z+i} \end{array}$$
envía el semi-plano de Poincaré
$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}\, z > 0\}$$
al disco unidad $\mathcal{D}$.
b. Deducir de lo anterior que el grupo de automorfismos de $\mathcal{H}$ es
$$\left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0 \right\}.$$
c. Identificar este grupo con
$$\mathbf{PSL}_2(\mathbb{R}) := \mathbf{SL_2}(\mathbb{R})/\{\pm \mathrm{Id}\}.$$
d. Observar que los resultados de este ejercicio, combinados con los del anterior, muestran que
$$\mathbf{PSU}_{1,1} \simeq \mathbf{PSL}_2(\mathbb{R}).$$
Explicitar el isomorfismo así definido.

Ejercicio 6. a. Mostrar que el grupo de automorfismos de la esfera de Riemann es
$$\left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}.$$
Indicación : Mostrar primero que este grupo está contenido en $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}\mathbf{P}^1)$ y utilizar una transformación bien escogida en este grupo para definir un automorfismo de $\mathbb{C}$, luego utilizar el ejercicio 3.
b. Identificar este grupo con
$$\mathbf{PSL}_2(\mathbb{C}) := \mathbf{SL_2}(\mathbb{C})/\{\pm \mathrm{Id}\}.$$

Ejercicio 7. Mostrar que $\mathbf{PSL}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbf{PGL}_n(\mathbb{C})$, que $\mathbf{PSU}_n \simeq \mathbf{PU}_n$ y que $\mathbf{PSU}_{p,q} \simeq \mathbf{PU}_{p,q}$.

Ejercicio 8. (Difícil) Mostrar que un retículo Γ de $\mathbb{C}$ tiene una basis de la forma $(u, \tau u)$ donde τ es un número complejo que satisface $\mathrm{Im}\,\tau > 0$, $-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\,\tau \leq \frac{1}{2}$, $|\tau| \geq 1$ y, si $|\tau| = 1$, entonces $\mathrm{Re}\,\tau \geq 0$. Dibujar la zona $\mathbb{C}$ conformada de los τ que cumplen con estas condiciones y mostrar que es un dominio fundamental para la acción de $\mathbf{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sobre $\mathcal{H}$. *Referencia* : Ahlfors, *Complex Analysis*, Cáp 7.