Hoja de ejercicios 3 : Haces, espacios anillados, teoría local de superficies de Riemann

2011-I — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{O}$ un abierto de $\mathbb{R}^n$. Mostrar que la correspondancia

$$C^{\infty}_{\mathcal{O}}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ suave}\},$$

donde U es un abierto de $\mathcal{O}$, define un haz de $\mathbb{R}$-álgebras sobre $\mathcal{O}$, llamado el **haz de funciones suaves sobre $\mathcal{O}$**.

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{O}$ un abierto de $\mathbb{R}^n$. Mostrar que la correspondancia

$$\Omega^k_{\mathcal{O}}(U) = \{\alpha : U \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Lambda^k \mathbb{R}^n, \mathbb{R})\},$$

(α es una k-forma diferencial sobre U) donde U es un abierto de $\mathcal{O}$, define un haz de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales sobre $\mathcal{O}$, llamado el **haz de k-formas diferenciales sobre $\mathcal{O}$**. Este haz no es un subhaz del haz de funciones cotinuas sobre $\mathcal{O}$.

Ejercicio 3. Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$.
a. Mostrar que la correspondancia

$$\mathcal{O}_{\Omega}(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorfa}\},$$

donde U es un abierto de Ω, define un haz de $\mathbb{C}$-álgebras sobre Ω, llamado el **haz de funciones holomorfas sobre U**.
b. Mostrar que la correspondancia

$$\mathcal{O}^*_{\Omega}(U) = \{f : U \to \mathbb{C}^* \mid f \text{ holomorfa}\},$$

donde U es un abierto de Ω, define un haz de anillos sobre Ω.

Ejercicio 4. Sea (X, O_X) un espacio anillado y sea $U \subset X$ un abierto.
a. Mostrar que la correspondancia

$$O_X|_U(V) := O_X(V),$$

donde V es un abierto de U, define un haz de anillos sobre U. El espacio anillado $(U, O_X|_U)$ así obtenido se llama el espacio anillado inducido por el haz estructural de X.
b. Mostrar que si $f : (X, O_X) \to (Y, O_Y)$ es un homomorfismo de espacios anillados y si $U \subset X$ y $V \subset Y$ son abiertos que cumplen $f(U) \subset V$, entonces $f|_U : U \to V$ define un homorfismo de espacios anillados entre $(U, O_X|_U)$ y $(V, O_Y|_V)$.

Ejercicio 5. En este ejercicio, damos una caracterización de los homomorfismos de espacios anillados. Sean (X, O_X) y (Y, O_Y) dos espacios anillados y sea $f : X \to Y$ una aplicación continua (no se supone que esta aplicación continua induce un homomorfismo de espacios anillados). Se supone que existen cubrimientos abiertos $\cup_{i \in I} U_i = X$ y $\cup i \in I V_i = Y$ tales que

$$f|_{U_i} : (U_i, O_X|_{U_i}) \longrightarrow (V_i, O_Y|_{V_i})$$

sea un homomorfismo de espacios anillados. Mostrar que f induce un homomorfismo de espacios anillados. Es decir, mostrar que $f^* : O_Y \to f_* O_X$ es un homomorfismo de haces.

Ejercicio 6. Sean $f, g : X \to Y$ dos aplicaciones holomorfas entre las superficies de Riemann X y Y. Se supone que

$$\Omega := \{x \in X \mid f(z) = g(z)\}$$

tiene un punto de acumulación. Mostrar que $f = g$.

Ejercicio 7. Sea X una superficie de Riemann. Una función meromorfa sobre X es una función holomorfa sobre X menos un conjunto discreto, en cada punto del cual $|f|$ tiende a $+\infty$. Dar una biyección entre funciones meromorfas sobre X y aplicaciones holomorfas de X a $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$.

Ejercicio 8. Sea X una superficie de Riemann y $\mathcal{M}(X)$ el conjunto de funciones meromorfas sobre X. Mostrar que $\mathcal{M}(X)$ es un cuerpo. *Indicación* : Mostrar primero que el conjunto de ceros y polos de una función meromorfa es un subconjunto discreto de X.

Ejercicio 9. a. Sea $f : X \to Y$ una aplicación holomorfa. Mostrar que f es abierta.
b. Deducir de esto que si X es compacta, Y es conexa y f es no constante, entonces f es sobreyectiva y Y es compacta.
c. Mostrar que una función holomorfa $f : X \to \mathbb{C}$ sobre una superficie de Riemann compacta es constante.
d. Deducir el teorema de Liouville a partir de lo anterior (se podrá observar que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es acotada, ∞ es una singularidad removible de f).