Hoja de ejercicios 2 : Funciones meromorfas, esfera de Riemann

2011-I

Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Sea f una función meromorfa sobre un abierto U de C y sea z_0 un polo de f en U.
a. Mostrar que existe una función holomorfa $h : D(z_0, R) \to \mathbb{C}$ y un único entero $n > 0$ tal que $h(z_0) \neq 0$ y

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^n}.$$

El entero n se llama el **orden** del polo z_0. *Indicación*: Se podrá expander $1/f$ en serie de potencias alrededor de z_0.
b. Mostrar que si z_0 es un polo de orden n de f, entonces existe un $R > 0$ tal que, para cualquier $r \in]0; R[$, existe una succesión $(a_k)_{k \geq -n}$ de números complejos que satisface : Si $z \in U$ es tal que $r < |z-z_0| < R$, entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k. \end{aligned}$$

Semejante expansión se llama una **expansión en serie de Laurent de f alrededor de z_0.** La parte $\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0}$ se llama la **parte principal** de f en z_0.

Ejercicio 2. Sea f una función meromorfa sobre un abierto U de C y sea $D(z_0; r]$ un disco cerrado contenido en U.
a. Mostrar que f tiene un número finito de polos y de ceros en $D(z_0; r]$.
b. Se nota

$$Z(f) = \{c_1, \cdots, c_k\}$$

el conjunto de ceros de f en $D(z_0; r]$ y $ord(c_i)$ el orden del cero c_i. De manera similar, se nota

$$P(f) = \{p_1, \cdots, p_l\}$$

el conjunto de polos de f en $D(z_0; r]$ y $ord(p_j)$ el orden del polo p_j. Mostrar que si $Z(f)$ y $P(f)$ están contenidos en el disco *abierto* $D(z_0; r)$, entonces

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma(z_0;r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \\ = &\sum_{i=1}^{k} ord(c_i) - \sum_{j=1}^{l} ord(p_j). \end{aligned}$$

Ejercicio 3. Se considera la siguiente relación de equivalencia sobre $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$: $(z_1, z_2) \sim (w_1, w_2)$ si existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $(z_1, z_2) = (\lambda w_1, \lambda w_2)$. Se nota $[z_1, z_2]$ la clase de equivalencia de (z_1, z_2) por esta relación y $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ el espacio topológico

$$\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}/\sim$$

(con la topología cociente). Este espacio se llama la **recta proyectiva compleja**.
a. Sea

$$V_i = \{[z_1, z_2] \in \mathbb{C}\mathbf{P}^1 \mid z_i \neq 0\}$$

para $i = 1, 2$. Mostrar que V_i es un abierto de $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ y que las aplicaciones

$$\psi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} V_1 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ [z_1, z_2] & \longmapsto & \frac{z_2}{z_1} \end{array} \right.$$

y

$$\psi_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} V_2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ [z_1, z_2] & \longmapsto & \frac{z_1}{z_2} \end{array} \right.$$

son homeomorfismos de V_i sobre $\mathbb{C}$.
b. Mostrar que las funciones de transición del cubrimiento $V_1 \cup V_2 = \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ así definido son holomorfas.
c. Se usa la notación introducida en clase. Mostrar que existe una biyección biholomorfa

$$f : \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C}\mathbf{P}^1$$

(es decir, una aplicación continua f tal que $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ es holomorfa para cualquier par (i, j) que cumpla $f(U_i) \subset V_j$).

Ejercicio 4. Se propone determinar las funciones meromorfas sobre $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$.
a. Mostrar que una fracción racional P/Q, donde P y Q son polinomios con coeficientes complejos, define una función meromorfa sobre $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$.
b. Sea $f : \mathbb{C}\mathbf{P}^1 \to \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ una aplicación holomorfa (=una función meromorfa sobre $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$). Mostrar que f es una función racional (es decir, proviene de una fracción racional como en el punto anterior). *Indicación*: Se podrá suponer que ∞ no es un polo de f (si es un polo, considerar $1/f$) y mostrar que la expresión $f - (h_1 + \cdots + h_s)$, donde s es el número de polos de f en $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ y h_j la parte principal de f en el polo p_j, define una función *holomorfa* sobre $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$.