Hoja de ejercicios 1 : Funciones holomorfas

2011-I FLORENT SCHAFFHAUSER

EJERCICIO 1. Sea

$$\gamma : \big(t \in [0;1]\big) \mapsto e^{i2k\pi t},$$

donde $k \in \mathbb{Z}$. Mostrar que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z} = k.$$

Interpretar el resultado. Esta integral se llama el **índice** del camino γ alrededor de 0.

EJERCICIO 2. Se identifica $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ de la manera estándar ($\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$). Mostrar que una función holomorfa $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ define una función diferenciable $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. ¿Cuál es la matriz jacobiana de f en un punto $z_0 \in U$? Mostrar que una función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ es holomorfa si y sólo si es diferenciable en el sentido real y su jacobiana es una matriz de similitud $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Deducir de eso que $f = P + iQ : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ es holomorfa si y sólo si se cumplen las **ecuaciones de Cauchy-Riemann**:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) & = & -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) & = & \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) \end{array} \right.$$

EJERCICIO 3. Sean $z = x + iy$ las coordenadas canónicas de $\mathbb{C}$, de tal manera que $dz = dx + idy$ y $d\overline{z} = dx - idy$. Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ es diferenciable en el sentido real, encontrar funciones $\frac{\partial f}{\partial z} : U \to \mathbb{C}$ y $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} : U \to \mathbb{C}$ tales que

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)d\overline{z}.$$

Deducir de eso que f es holomorfa en un punto z_0 de U si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$. *Indicación*: escribir $f = P + iQ$ con $P, Q : U \to \mathbb{R}$ y utilizar las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

EJERCICIO 4 (DESIGUALDADES DE CAUCHY). Si $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa sobre U y si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ es su expansión en serie de potencias en una vecindad de $z_0 \in U$, mostrar las *desigualdades de Cauchy* :

$$|a_n| \leq \frac{1}{r^n} \max_{z \in C(z_0;r)} |f(z)|.$$

EJERCICIO 5 (TEOREMA DE LIOUVILLE). Mostrar que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función entera (= una función holomorfa sobre todo $\mathbb{C}$) y si f es acotada ($\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq M$), entonces f es constante. *Indicación*: Utilizar la desigualdad de Cauchy para $n = 1$ para demostrar que $f' = 0$ sobre $\mathbb{C}$.

EJERCICIO 6 (TEOREMA DE GAUSS). Deducir del teorema de Liouville que $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado (=todo polinomio $P \in \mathbb{C}[z]$ que no es constante necesariamente tiene una raíz).

EJERCICIO 7. Deducir el principio del máximo a partir del teorema de la aplicación abierta.

EJERCICIO 8. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa sobre un abierto U de C y supongamos que f es biyectiva. Mostrar que f^{-1} es holomorfa. *Indicación*: Se podrá utilizar la forma normal local de una función holomorfa.

EJERCICIO 9. Sea f una función holomorfa sobre un abierto U de C y sea z_0 un cero de f en U. Mostrar que existe una función holomorfa $h : D(z_0, R) \to \mathbb{C}$ y un único entero $n > 0$ tal que $h(z_0) \neq 0$ y

$$f(z) = (z - z_0)^n h(z).$$

El entero n se llama el **orden** del cero z_0.

EJERCICIO 10 (LEMA DE SCHWARZ). Sea $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ el disco unidad de $\mathbb{C}$ y sea

$$f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$$

una función holomorfa tal que $f(0) = 0$.

a. Mostrar que

$$\forall z \in \mathcal{D}, |f(z)| \leq |z|.$$

b. Mostrar que si existe $z_0 \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ tal que $|f(z_0)| = |z_0|$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{C}$ de módulo $|\alpha| = 1$ tal que

$$\forall z \in \mathcal{D}, f(z) = \alpha z$$

(es decir, f es una rotación).

EJERCICIO 11. Sea U un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y sea $\mathcal{O}(U)$ el conjunto de funciones holomorfas sobre U. Mostrar que $\mathcal{O}(U)$ es un anillo de integridad.