Tarea para entregar el 28 de marzo

2011-I — Florent Schaffhauser

Se denota λ la medida de lebesgue sobre $\mathbb{R}$. El objetivo del problema es demostrar el siguiente teorema, que se debe a Egorov.

Teorema. *Sea E un subconjunto Lebesgue-medible de medida finita de $\mathbb{R}$ y sea*

$$(f_j : E \longrightarrow \mathbb{R})_{j\geq 1}$$

una succesión de funciones Lebesgue-medibles que converge simplemente hacia una función $f : E \to \mathbb{R}$. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto cerrado A_ε de $\mathbb{R}$, incluido en E, tal que

$$\lambda(E \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$$

*y $(f_j)_{j\geq 1}$ converja **uniformemente** hacia f sobre A_ε.*

De manera explícita, se quiere construir $A_\varepsilon \subset E$ cerrado tal que $\lambda(E \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ y

$$\forall \delta > 0, \exists k \geq 1 \mid \forall j > k, \sup_{x\in A_\varepsilon} |f(x) - f_j(x)| < \delta.$$

1. Mostrar que f es medible.
2. Para cualquier $n \geq 1$ y cualquier $k \geq 1$, se pone

$$E_k^n = \left\{ x \in E \mid \forall j > k, |f(x) - f_j(x)| < \frac{1}{n} \right\}.$$

Mostrar que :
- **a.** E_k^n es Lebesgue-medible.
- **b.** Para n fijo y k cualquiera, $E_k^n \subset E_{k+1}^n$.
- **c.** Para n fijo, $\cup_{k=1}^{+\infty} E_k^n = E$.

3. Deducir de lo anterior que

$$\forall n \geq 1, \exists k_n \geq 1 \mid \lambda(E \setminus E_{k_n}^n) < \frac{1}{2^n}.$$

4. Sea $N_\varepsilon \geq 1$ tal que $\sum_{m=N_\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}$ y sea

$$B_\varepsilon = \bigcap_{m\geq N_\varepsilon} E_{k_m}^m.$$

Mostrar que B_ε es Lebesgue-medible y que

$$\lambda(E \setminus B_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

5. Sea $\delta > 0$ y sea $n \geq N_\varepsilon$ tal que $\frac{1}{n} < \delta$. Mostrar que

$$\forall j > k_n, \forall x \in B_\varepsilon, |f(x) - f_j(x)| < \delta.$$

6. Mostrar que existe $A_\varepsilon \subset B_\varepsilon$ cerrado tal que

$$\lambda(B_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

7. Deducir de todo lo anterior que

$$\lambda(E \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$$

y que $(f_j)_{j\geq 1}$ converge uniformemente hacia f sobre A_ε.